Sistemas lineales y no lineales: del oscilador armónico al oscilador caótico

Irene Sendiña Nadal y Miguel A. F. Sanjuán
Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos
Universidad Rey Juan Carlos
Tulipán s/n, 28933 Móstoles, Madrid

11 de abril de 2002

Resumen

Oscillations are ubiquitous in nature, and consequently oscillatory motion constitutes a fundamental and basic concept in general physics. In the present work an elementary introduction to oscillations, including linear, nonlinear and chaotic oscillations is given. The authors believe that these simple concepts should be taught at the earliest possible moment, either at Secondary level or at the introductory university Physics courses, and hence this is an attempt to introduce simple ideas which might be of help to Physics teachers.

1 Introducción

La idea intuitiva que uno tiene de oscilación es la evolución en el tiempo de un sistema caracterizado por un movimiento de vaivén, ya sea éste regular o no. Existen multitud de situaciones en los que el movimiento oscilatorio es la dinámica predominante, siendo los ejemplos más comunes el de una masa suspendida de un muelle elástico, el péndulo de un reloj de pared, un circuito eléctrico oscilante, las oscilaciones de las cuerdas de una guitarra, etc. Sin embargo existen otros ejemplos aparentemente menos familiares como son el comportamiento periódico de algunos ritmos biológicos tales como la respiración, las palpitaciones del corazón, el ciclo de reproducción de las plantas, o fenómenos físicos que se repiten periódicamente como las mareas o las vibraciones de las moléculas. La evolución en el tiempo de estos sistemas puede ir desde un comportamiento totalmente periódico, como en los ejemplos anteriores, a un comportamiento irregular, en el que las oscilaciones nunca se repiten, denominado caótico. Un péndulo simple forzado periódicamente puede exhibir este comportamiento caótico, de igual modo que muchos otros sistemas dinámicos como la atmósfera o un circuito electrónico. Esto puede dar una idea de que los comportamientos oscilantes se encuentran por todas partes en la naturaleza, y en consecuencia su estudio ha sido y sigue siendo indispensable en física.

En este artículo se pretende dar una visión general y sencilla del comportamiento de un oscilador en función de los distintos tipos de fuerzas que pueden actuar sobre él, usando nociones elementales de la teoría de los sistemas dinámicos. De menor a mayor complejidad empezaremos por el caso más sencillo, el de un oscilador lineal libre en el que la amplitud del movimiento es directamente proporcional a la fuerza desequilibradora, movimiento conocido como armónico simple. Cualquier realización experimental llevaría consigo que todo oscilador acabe deteniéndose debido a la existencia de fuerzas de rozamiento o de fricción que se oponen a su movimiento. Por lo tanto la existencia de rozamiento hará que las oscilaciones cesen, a no ser que haya un aporte externo de energía en cada oscilación que compense las pérdidas por rozamiento. Supongamos que una fuerza externa periódica de amplitud F_0 y frecuencia ω_f actúa sobre el oscilador. Esto significa que por cada período de la oscilación se introduce un aporte de energía al oscilador que produce como efecto un mantenimiento de las oscilaciones del sistema, incluso en presencia de amortiguamiento. En particular, si el oscilador es lineal presentará un comportamiento periódico característico que dependerá de la frecuencia de la fuerza externa oscilante.

El siguiente grado de complejidad en un oscilador proviene de la no linealidad de la fuerza que actúa sobre él. En general, todo oscilador se comportará como un oscilador no lineal si se le aleja lo suficiente de la posición de equilibrio. De este modo se introduce al estudiante en el estudio de los sistemas no lineales. Mientras que en los osciladores lineales la presencia de rozamiento y de una fuerza periódica externa únicamente puede producir una respuesta periódica, en un oscilador no lineal la respuesta puede llegar a ser caótica para cierto rango de valores de algún parámetro característico que modifiquemos.

Además de introducir conceptos como **no linealidad** y oscilaciones irregulares o erráticas, utilizando sistemas oscilantes sencillos, otra aportación del artículo es presentar de forma natural una manera alternativa de representar las soluciones de un sistema en general (además de la ya conocida espacio-tiempo), que consiste en dibujar la coordenada desplazamiento a lo largo del eje de las abscisas y el valor simultáneo de la velocidad a lo largo del eje de las ordenadas. Esta representación se conoce como **espacio de fases**, que fue introducido en Física a comienzos del siglo XX por el físico americano Josiah Willard Gibbs, y nos permite representar el estado del sistema en cada instante. Así, si para caracterizar completamente un sistema hemos de dar sus coordenadas de posición y velocidad en el tiempo, en un espacio bidimensional este par de coordenadas irán describiendo una trayectoria que nos da idea de como evoluciona el sistema en el tiempo. Por tanto, una trayectoria cerrada nos indicaría que el sistema evoluciona de forma periódica.

Para abordar el propósito de este trabajo utilizaremos como modelos de sistemas oscilantes el sistema masa-muelle (que consiste en un cuerpo de masa m unido a un muelle) y un péndulo simple (que consiste en una masa puntual unida a un hilo inextensible y sin masa que se mueve en un plano).

Pensamos que estos conceptos sencillos deberían ser introducidos en los cursos de Física elementales lo antes posible, ya que proporcionan al alumno imagenes sencillas e intuitivas de los procesos físicos, además de constituir una forma de pensar basada en nociones geométricas, sin que ello suponga una especial dificultad añadida. De hecho, un capítulo sobre oscilaciones se considera indispensable en cualquiera de los manuales típicos de enseñanza de la Física tanto a nivel de enseñanza secundaria [1] como de primeros cursos universitarios [2, 3, 4]. Un método interactivo a través de internet, se encuentra en el *Curso interactivo de Física en internet* de A. Franco [5], donde se ofrece la posibilidad de experimentar con programas en un ordenador aportando una visión más palpable de las oscilaciones. En este contexto, uno de los objetivos de este trabajo es precisamente el de suministrar una guía que pudiera servir de ayuda a profesores de Física en la enseñanza de estos conceptos.

2 Oscilador Lineal

Un oscilador lineal se caracteriza por la proporcionalidad existente entre la fuerza que tiende a restaurar la posición de equilibrio del sistema y la magnitud de la perturbación que lo ha alejado del mismo. En un sistema como el de la Fig. 1 en el que un cuerpo está unido a un muelle sin rozamiento, esto se traduce en la siguiente ecuación, conocida como ley de Hooke:

$$F = -kx, \tag{1}$$

donde k representa la constante elástica del muelle que dependerá de su rigidez y el signo negativo indica que su sentido es opuesto al movimiento de elongación natural, fruto de la fuerza que actúa sobre él. Basta por tanto considerar la segunda ley de Newton para de este modo obtener la correspondiente ecuación del movimiento

$$ma = -kx \implies \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \tag{2}$$

donde $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. La Ec. 2 es una ecuación que involucra derivadas de segundo orden de la variable desplazamiento $x(t)$ con respecto al tiempo. En matemáticas, a este tipo de ecuaciones se las llama ecuaciones diferenciales de segundo orden. Una solución típica de la Ec. 2 es de la forma:

$$x(t) = A\,\sin(\omega_0 t + \phi), \tag{3}$$

donde A, ω_0 y ϕ son constantes que indican respectivamente el desplazamiento máximo de la masa respecto de la posición de equilibrio, la frecuencia propia o natural del oscilador y una fase inicial.

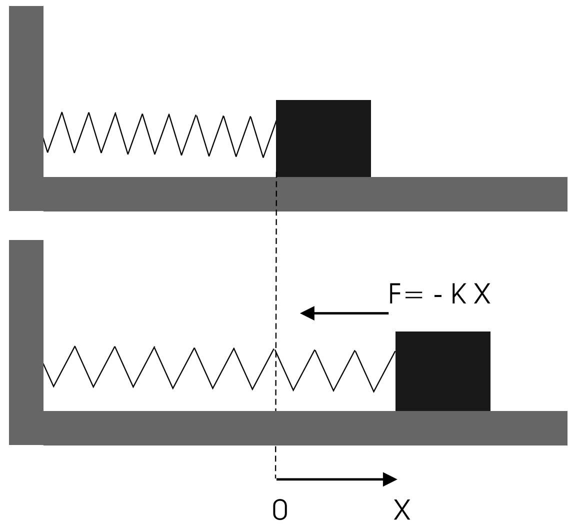

Figura 1: Esquema de un oscilador lineal representado por una masa sometida a una fuerza de recuperación lineal bajo la acción de un muelle.

Si procedemos a dibujar esta solución en un espacio de coordenadas $x-t$, el comportamiento periódico del movimiento de la masa m dado por la Ec. 3 describirá la trayectoria sinusoidal representada en la Fig. 2(a). Otra forma muy útil de visualizar este movimiento es a través de lo que recibe el nombre de **espacio de fases**, que no es otra cosa que el espacio de velocidades y posiciones $v-x$. Bajo esta perspectiva se representa la velocidad v del objeto en el eje vertical en función de su posición x en el eje horizontal tal y como se observa en la Fig. 2(b).

La velocidad del objeto se obtiene derivando la Ec. 3 respecto del tiempo:

$$v = \frac{dx}{dt} = A\,\omega_0\,\cos(\omega_0\,t + \phi). \tag{4}$$

Observamos pues que la velocidad y la posición están desfasadas $\frac{\pi}{2}$, es decir, la velocidad es máxima en la posición de equilibrio y se anula cuando la posición alcanza su máximo. En el espacio de fases el objeto describirá trayectorias elípticas que dependerán de las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $v(0) = v_0$ tal y como se muestra en la Fig. 2(b). Nótese que esto es de este modo porque en ausencia de fricción la energía mecánica total del oscilador, $E = E_p + E_c = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$, debe de permanecer constante, siendo la elipse la trayectoria en el espacio de fases que hace $E = cte$. Además obsérvese que en el caso particular en el que $m = k = 1$, las trayectorias se convierten en circunferencias de radio $\sqrt{2E}$ y con centro el punto de equilibrio $(x = 0, v = 0)$. De modo que cuanto más grande sea la energía del sistema,

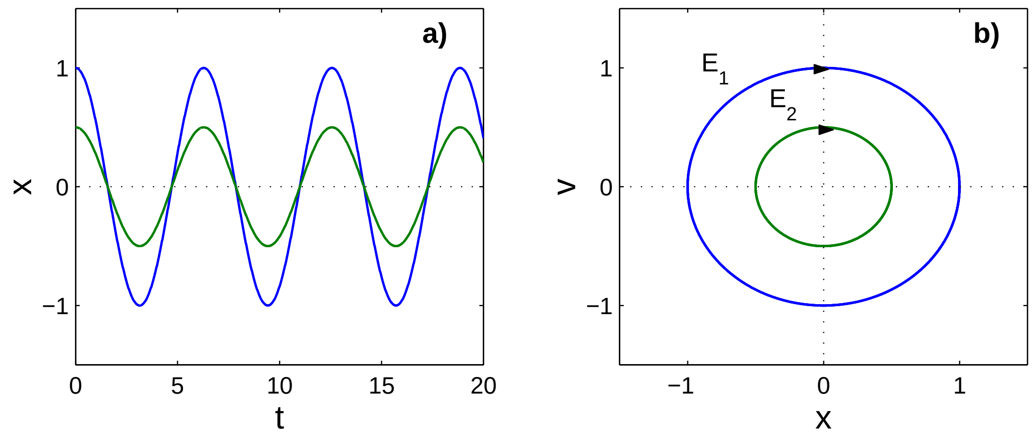

Figura 2: a) Respuesta de un oscilador lineal conservativo en el espacio $x - t$ según la Ec. 3 para dos condiciones iniciales diferentes. b) Respuesta de un oscilador lineal conservativo en el espacio de fases $v - x$ con $E_1 > E_2$.

mayor será el radio de la circunferencia en el espacio de fases y por tanto mayor será la amplitud de las oscilaciones. Esta imagen de trayectorias cerradas es típica en los sistemas en los que se conserva la energía y que en consecuencia se llaman **sistemas conservativos**.

3 Oscilador Lineal Amortiguado

El oscilador lineal descrito en la sección anterior se trata de una idealización, ya que desde un punto de vista experimental un sistema oscilante siempre está sometido a algún tipo de fuerza de rozamiento o disipativa, cuyo efecto consiste en producir una pérdida de energía hasta que deja de oscilar. Los sistemas que poseen esta característica genérica, y que por tanto disipan energía, reciben el nombre de **sistemas disipativos**.

Consideremos el sistema de la Fig. 1 y supongamos que sobre el objeto existe una fuerza de rozamiento de tipo viscoso, lo cual significa que existe una disipación proporcional a la velocidad del objeto y en sentido contrario a su movimiento. Como hemos hecho en el caso anterior, basta considerar la segunda ley de Newton teniendo en cuenta todas las fuerzas que actúan sobre él, es decir, incluyendo la fuerza de fricción que se opone al movimiento, para

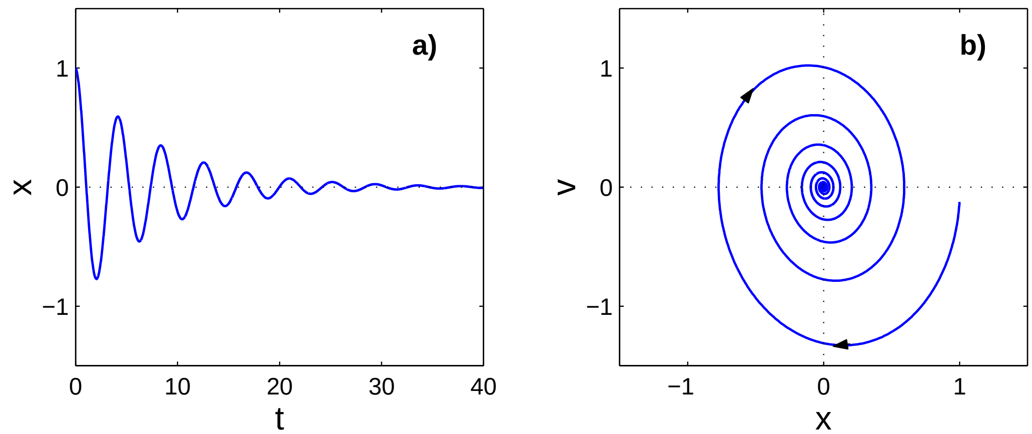

Figura 3: a) Evolución temporal de un oscilador lineal amortiguado en el espacio $x - t$. b) Trayectoria en el espacio de fases $v - x$.

encontrar las ecuaciones del movimiento:

$$ma = -kx - bv \implies \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \tag{5}$$

donde $2\gamma = \frac{b}{m}$ y ω_0^2 es la frecuencia natural del oscilador sin rozamiento.

La Ec. 5 es una ecuación diferencial de segundo orden cuya solución viene dada por:

$$x(t) = A\, e^{-\gamma t} \sin(\omega\, t + \phi), \tag{6}$$

en el caso en que $\omega_0^2 > \gamma^2$. A es de nuevo la amplitud máxima, γ es la frecuencia de extinción y $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$. Como se puede deducir fácilmente de la anterior solución, el efecto del rozamiento es el de reducir exponencialmente con el tiempo la amplitud de la oscilación a cero, lo cual queda reflejado en la Fig. 3(a). Por ello también recibe el nombre de movimiento amortiguado, ya que la amplitud se "amortigua" con el paso del tiempo y de modo genérico se habla de **amortiguamiento**. Nótese que en este caso, en que $\omega_0^2 > \gamma^2$, existen oscilaciones cuyas amplitudes se amortiguan con el tiempo y este tipo de movimiento recibe el nombre de **subamortiguado**. Existen otros tipos de movimiento cuando $\omega_0^2 \leq \gamma^2$, en los que la amplitud del movimiento decae de modo paulatino a cero, pero sin sufrir oscilaciones. El caso $\omega_0^2 = \gamma^2$ recibe el nombre de **amortiguamiento crítico** y el caso $\omega_0^2 < \gamma^2$ de movimiento **sobreamortiguado**, donde el término de inercia es insignificante frente al término de amortiguamiento.

Recordemos que en el caso no amortiguado, las trayectorias en el espacio de fases venían representadas por circunferencias cuyo radio era función de la energía. En el caso amortiguado, la amplitud disminuye a medida que aumenta el tiempo, de modo que intuitivamente podemos visualizar sus trayectorias en el espacio de fases como una circunferencia cuyo "radio" disminuye en cada oscilación. Es decir, estamos ante el caso de una espiral. En la Fig. 3(b) se representa el espacio de fases $v - x$ del movimiento de la masa unida al muelle, que describe una espiral que tiende hacia el origen ($x = v = 0$) y que resulta ser el punto de equilibrio del sistema, es decir, que permanecerá en $x = 0$ sin moverse. Independientemente de la condición inicial (x_0, v_0) (o equivalentemente energía inicial E_0) todas las trayectorias convergerán en forma de espiral a este punto que por esta razón recibe el nombre de **punto atractor espiral** según la **teoría de sistemas dinámicos**. Nótese la diferencia con el caso sin amortiguamiento en el que el espacio de fases consistía en una familia de curvas cerradas de energía constante. En ese caso el punto de equilibrio $(0, 0)$ recibe el nombre de **centro**. Y desde este punto de vista, el efecto de la inclusión de la disipación o amortiguamiento, es cambiar un centro por una espiral.

4 Oscilador Forzado y Resonancia

Hemos visto que en los sistemas amortiguados o disipativos la amplitud de las oscilaciones va decreciendo gradualmente hasta que se recupera el estado de equilibrio de reposo. Para poder mantenerlas hay que suministrar energía al sistema mediante la aplicación de una fuerza externa que compense las pérdidas de energía por amortiguamiento. Un ejemplo gráfico de esta situación se obtiene si imaginamos una persona sentada en un columpio que es balanceada por otra. Las oscilaciones se mantienen si se ejerce un impulso en cada período. Para un muelle con amortiguamiento y mediante una fuerza periódica sinusoidal de amplitud F_0 y frecuencia ω_f, la ecuación de movimiento, haciendo uso de la segunda ley de Newton, viene dada por:

$$ma = -kx - bv + F_0 \cos \omega_f t \implies \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_0 \cos \omega_f t \qquad (7)$$

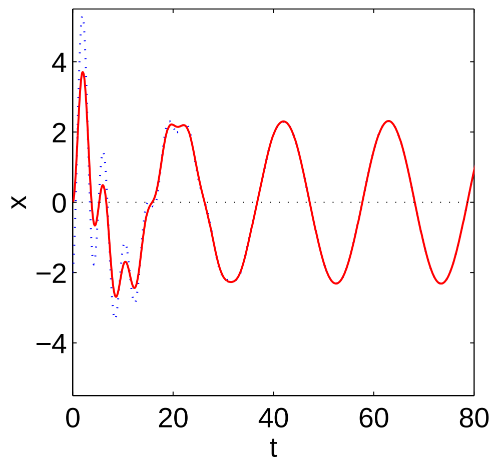

Figura 4: Solución transitoria y estacionaria de un oscilador amortiguado forzado para dos condiciones iniciales diferentes

El movimiento resultante se compone de un transitorio inicial que depende de las condiciones iniciales y de un estacionario que es independiente de éstas y caracterizado por oscilar armónicamente con la frecuencia ω_f. La Fig. 4 muestra cómo dos condiciones iniciales diferentes, (linea de puntos y linea continua), poseen un transitorio diferente pero al cabo de un cierto tiempo el estacionario es el mismo para ambas condiciones iniciales. Respecto a la amplitud del estado estacionario no sólo depende de la amplitud F_0 de la fuerza externa periódica sino también de la frecuencia ω_f. Cuando la frecuencia impulsora ω_f es igual o se aproxima a la frecuencia natural del sistema ω_0 se produce el fenómeno de resonancia. Entonces la amplitud de las oscilaciones del sistema se hace mucho mayor que la amplitud de la fuerza externa impulsora, y la transferencia de energía es máxima.

5 Oscilador No Lineal

Los sistemas no lineales se caracterizan porque presentan una relación causa-efecto que no es proporcional, a diferencia de lo que sucedía con el sistema masa-muelle. En la realidad casi todos los sistemas oscilantes se acercan a la no linealidad si se los aleja suficientemente de la posición de equilibrio. Un ejemplo paradigmático de oscilador no lineal es el péndulo simple, donde una partícula de masa m cuelga de una cuerda inextensible y sin masa de longitud ℓ (ver Fig.5). En este caso, la no linealidad proviene de que la fuerza que tiende a llevarlo de nuevo al equilibrio no es proporcional al desplazamiento

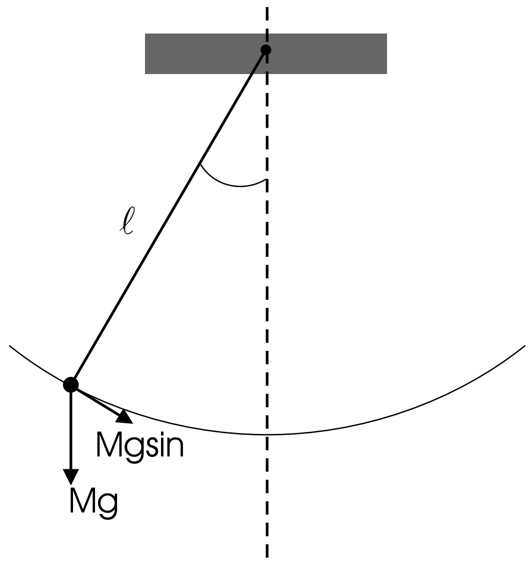

Figura 5: Esquema de un péndulo.

θ del ángulo con respecto a la vertical, sino al valor del seno del ángulo $\sin\theta$. La ecuación del movimiento para este oscilador no lineal, considerando que no hay disipación de energía, es:

$$m\ell\alpha = -mg\sin\theta \implies \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0, \tag{8}$$

donde α es la acelaración angular.

Para desplazamientos pequeños de la posición vertical de equilibrio del péndulo, la Ec. 8 se aproxima a la forma lineal del oscilador armónico, ya que entonces $\sin\theta \approx \theta$, obteniéndose en el espacio de fases las mismas trayectorias cerradas elípticas del muelle sin rozamiento. De hecho se acostumbra a utilizar esta aproximación en los cursos elementales de introducción a la Física, conduciendo a veces a error, ya que de este modo uno podría llegar a pensar que todos los sistemas pueden ser susceptibles de ser lineales. Sin embargo, para amplitudes mayores la versión lineal de la Ec. 8 (donde habríamos sustituido $\sin\theta$ por θ) deja de tener validez y se tiene que resolver teniendo en cuenta la ecuación completa con el término no lineal, esto es, tal y como aparece en la Ec. 8. Por supuesto que esta ecuación se puede resolver de modo exacto y por lo tanto es posible encontrar una expresión analítica para sus soluciones, pero no utilizando funciones elementales sencillas. Sin embargo existen otros métodos de análisis como el numérico o computacional que nos permiten determinar el comportamiento del sistema en función de sus parámetros y obtener una imagen cualitativa de su comportamiento en el espacio de fases (Fig. 6).

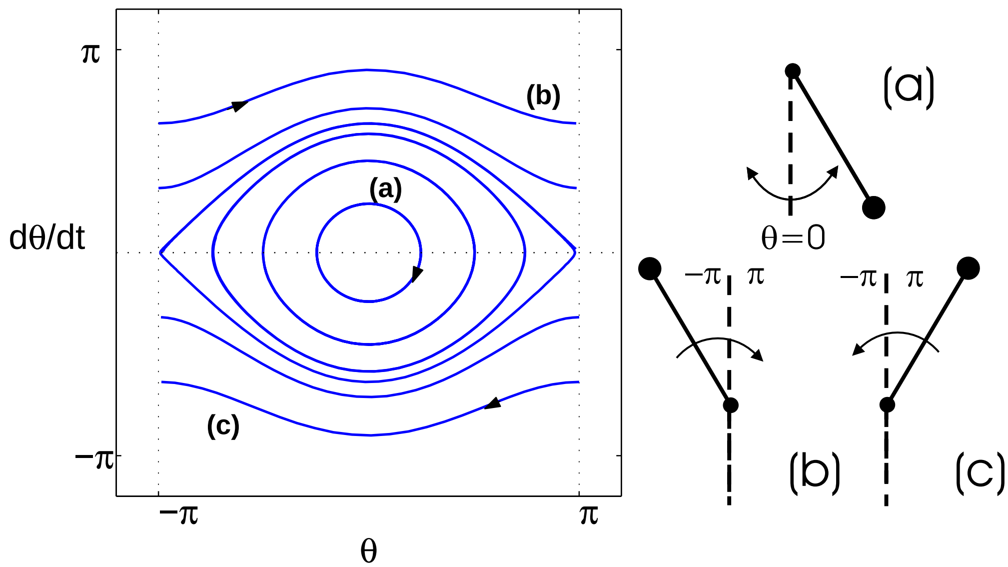

Figura 6: Representación en el espacio $d\theta/dt - \theta$ de un péndulo no lineal y los diferentes tipos de movimientos del péndulo: oscilaciones (a), rotaciones a derechas (b) y rotaciones a izquierdas (c).

Este sistema posee dos posiciones de equilibrio $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, siendo la primera estable e inestable la segunda. La **noción de estabilidad** se puede describir usando argumentos sencillos. Si movemos ligeramente el péndulo de su posición de equilibrio y posteriormente vuelve a dicha posición, entonces decimos que es **estable**. Mientras que si tras modificar ligeramente su posición, el sistema se aleja de ella, entonces decimos que es **inestable**. En la Fig. 6 se puede observar fácilmente cómo para oscilaciones de pequeña amplitud θ, las trayectorias son prácticamente circulares (a) en torno al punto de equilibrio $\theta = 0$ como las descritas por el sistema masa-muelle lineal. Conforme aumenta la amplitud de las oscilaciones el carácter no lineal comienza a ser evidente al deformarse cada vez más las trayectorias en el espacio de fases. Otra característica de estas oscilaciones es que el período depende de la amplitud, a diferencia de lo que sucede en los sistemas lineales. Si tomamos como condición inicial $\theta_0 = \pi$ y $(d\theta/dt)_0 \neq 0$, es decir, lanzamos el péndulo desde arriba, el péndulo realizará un movimiento de rotación sobre sí mismo dando lugar a trayectorias abiertas en el espacio de fases como las señaladas (b) y (c) en la Fig. 6 que representan **rotaciones a derechas** o **rotaciones a izquierdas** respectivamente, dependiendo de las condiciones iniciales. La curva que "separa" las rotaciones (curvas abiertas) de las oscilaciones (curvas cerradas) se llama **separatriz** y representaría el movimiento del péndulo que trataría de llegar a la posición de equilibrio inestable $\theta = \pi$ teniendo que invertir para ello un tiempo infinito. Para valores de la energía ligeramente inferiores al de la separatriz, el péndulo realiza oscilaciones de gran amplitud aproximándose mucho a la posición de equilibrio inestable $\theta = \pi$, mientras que para energías superiores, el péndulo llega a cruzar la posición de equilibrio inestable realizando rotaciones completas.

6 Oscilador Caótico

El último estadio de complejidad en el estudio de un oscilador es el que surge cuando un oscilador no lineal amortiguado es forzado periódicamente. La ecuación de movimiento de un péndulo en tales condiciones es:

$$
\begin{aligned}
m\ell\alpha &= -mg\sin\theta - bv + F_0\cos\omega_f t \\
&\Longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\sin\theta = F_0\cos\omega_f t. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

En el caso de oscilaciones pequeñas (comportamiento lineal) hemos visto que la aplicación de una fuerza externa periódica puede dar lugar a fenómenos de resonancia. Sin embargo, respuestas no lineales son inevitables en el mundo real. La naturaleza de las soluciones de la Ec. 9 va a depender mucho de los valores de los parámetros y de las condiciones iniciales. De este modo, si fijamos todos los parámetros excepto la amplitud F_0 del forzado periódico, que servirá como parámetro de control, es posible obtener desde un comportamiento periódico para ciertos valores hasta un comportamiento totalmente aperiódico para otros, tal y como se observa en las Figs. 7(a-b).

El comportamiento irregular o errático reflejado en la Fig. 7(b) se conoce con el nombre de **caótico** y se caracteriza por la ausencia de pautas de regularidad, y por presentar un comportamiento donde una pequeña diferencia en

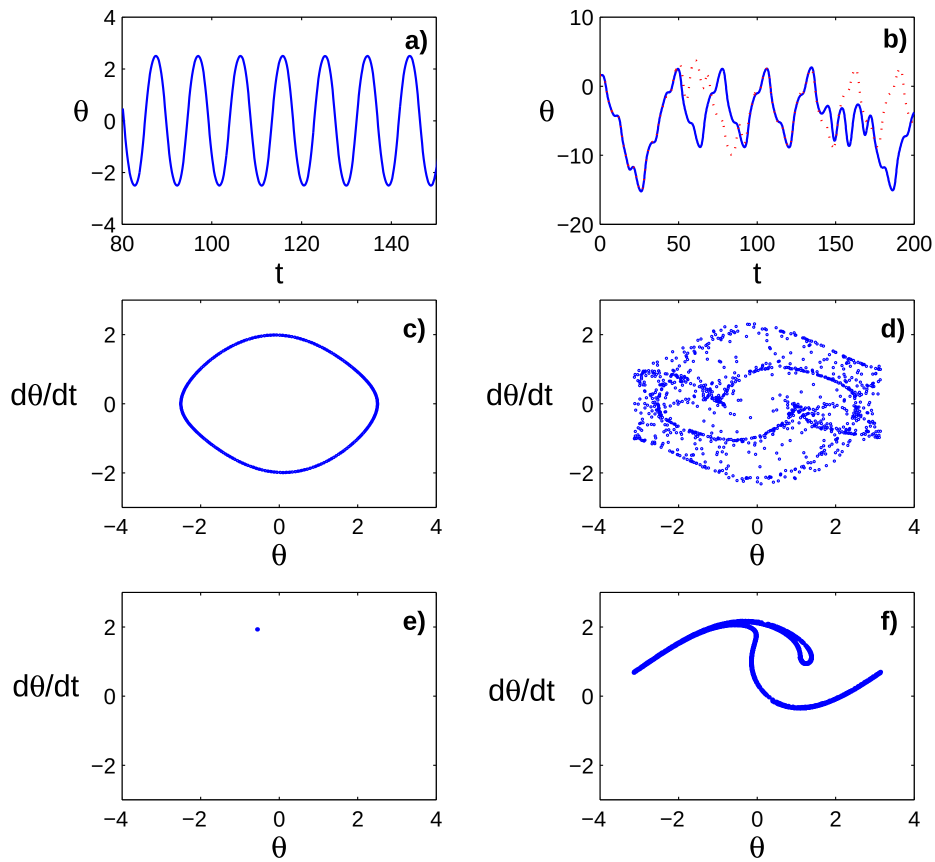

Figura 7: a) Serie temporal periódica de un oscilador no lineal amortiguado y forzado con $F_0 = 0.9$. b) Series temporales caóticas para un oscilador no lineal amortiguado y forzado correspondientes a dos condiciones iniciales muy próximas $\theta = 0$ y $\theta = 0.001$ con $F_0 = 1.15$. c) y d) Espacio de fases $d\theta/dt - \theta$ de los comportamientos periódico y caótico de las situaciones a) y b) respectivamente. e) y f) Plano de Poincaré de los movimientos correspondientes a c) y d) respectivamente. El punto en e) indica que se trata de una órbita periódica de período 1, mientras que la figura que aparece en f) está formada por un conjunto infinito de puntos y conforman un atractor extraño de una órbita caótica del péndulo.

las condiciones iniciales tiene efectos impredecibles sobre el comportamiento ulterior del sistema.

Resulta de especial importancia destacar que este **comportamiento aperiódico** es completamente determinista, de tal forma que basta con conocer las condiciones iniciales del sistema para obtener su evolución posterior. Como se ha mencionado anteriormente, una de las propiedades fundamentales de los sistemas caóticos es **la extrema sensibilidad a las condiciones iniciales**, cuya consecuencia más importante es la perdida de la capacidad de predicción sobre la evolución temporal de un sistema a tiempos largos. Esto se muestra en la Fig. 7(b), donde dos condiciones iniciales para el desplazamiento angular distintas pero muy próximas, evolucionan en el tiempo de forma completamente diferente a tiempos largos. Es precisamente esta característica de la sensibilidad a las condiciones iniciales la que limita a unos pocos días una predicción fiable del tiempo meteorológico usando modelos no lineales de los procesos atmosféricos.

Es necesario decir que para un oscilador forzado el espacio de fases es tridimensional, donde el tercer eje corresponde a la variable fase, o si se prefiere la variable tiempo, que aporta la fuerza externa aplicada. Así, la órbita correspondiente al caso (a) en el espacio de fases tridimensional, sería una hélice, y lo que estamos visualizando en la Fig.7(c) es justamente una proyección sobre el plano $d\theta/dt - \theta$. Lo mismo sucede para la situación (b), salvo que en este caso se trata de una estructura mucho más complicada. Mientras que el movimiento periódico se reconoce mediante órbitas cerradas en la proyección bidimensional del espacio de fases (Fig.7(c)), el movimiento caótico da lugar a una estructura extraña que no llega a cubrir el espacio de fases densamente (Fig.7(d)).

Dado que efectivamente se trata de una proyección bidimensional de un espacio de fases tridimensional, cabría pensar en algún artilugio mediante el cual podríamos obtener la información del sistema dinámico mediante la observación en un plano, lo cual sería mucho más sencillo. Esto fue precisamente lo que ideó a finales del siglo XIX el matemático francés Henri Poincaré con lo que actualmente se conoce como **plano de Poincaré**. La idea es la siguiente: tomemos el movimiento del péndulo de la Fig.7(c), que como hemos dicho antes en el espacio de fases tridimensional se trata de una hélice. Tomemos un plano paralelo al plano $d\theta/dt - \theta$ y situémoslo en el eje de los tiempos cuando la variable tiempo equivale a un período de la fuerza externa. La **órbita** del péndulo tendrá una intersección no nula con este plano. Tomemos dicho plano en cada intervalo de tiempo igual a un período en cada período sucesivo. Si el movimiento es periódico, como en el caso de la Fig.7(c), entonces siempre cortará a dicho plano en el mismo punto. Eso es precisamente lo que representa la Fig.7(e), donde el punto indica que se trata de un movimiento periódico de período 1. Si hubiera dos puntos significaría un movimiento periódico de período 2 y así sucesivamente. Cuando aplicamos la misma técnica al movimiento "caótico" de la Fig.7(d), la órbita corta al plano en puntos diferentes a cada período, dando lugar a la Fig.7(f), que representa a un **atractor extraño** con una forma peculiar, aunque concentrado en una región del espacio de fases. Se trata precisamente de un **atractor caótico** en el plano de Poincaré correspondiente al movimiento de una **órbita caótica** del péndulo y que viene además caracterizado por una dimensión no entera o fraccionaria y que recibe el nombre de **dimensión fractal**. Esta dimensión no entera es consecuencia directa de los factores de determinismo, disipación y sensibilidad a las condiciones iniciales, que caracterizan una dinámica caótica.

7 Conclusiones

Tradicionalmente solo se hace mención a los sistemas lineales en los cursos elementales de Física, tal vez porque se considere que la introducción a los sistemas no lineales sea algo muy complejo para lo que el alumno no esté preparado. La idea que hemos tratado de transmitir en este trabajo es que es posible introducir las ideas básicas de los sistemas no lineales, incluyendo el comportamiento caótico, a través de ejemplos sencillos de movimiento oscilatorio. Debido a la naturaleza ubicua de las oscilaciones y a su papel fundamental en la Física, constituiría un capítulo necesario en cualquier curso elemental y por tanto pensamos que es el camino natural para introducir los sistemas no lineales en la enseñanza de la Física tanto a los alumnos de Enseñanza Secundaria como a los de primeros cursos universitarios.

Referencias

[1] A. Peña y J. A. García, *Física. Segundo de Bachillerato LOGSE*, McGrawHill, Madrid, 1998.

[2] P. A. Tipler, *Física para la Ciencia y la Tecnología.* Ed. Reverté, Vol. 1, Cuarta Edición. Barcelona, 1999.

[3] M. Alonso, y E. J. Finn, *Física*. Addison-Wesley Iberoamericana, Delaware, 1995.

[4] R. P. Feynman, R. B. Leighton, y M. Sands, *Física*. Addison-Wesley Iberoamericana, Vol. 1. Delaware, 1987.

[5] Ángel Franco García, *Física con ordenador. Curso interactivo de Física en internet.* http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/oscilacion.htm