Structures fractales et capacité de prédiction dans certains systèmes dynamiques non linéaires

Jacobo Aguirre et Miguel A. F. Sanjuán
Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos
Departamento de Matemáticas y Física Aplicadas y Ciencias de la Naturaleza
Universidad Rey Juan Carlos
Tulipán s/n, 28933 Móstoles (Madrid), Espagne
msanjuan@escet.urjc.es

Résumé

Un des objectifs fondamentaux de la science est la prédiction, de telle sorte que lorsque la prédiction se perd, on pourrait conclure qu'un des fondements de la science tremble. La notion de système chaotique et de dépendance sensible aux conditions initiales impliquent une certaine perte de la prédiction de l'évolution temporaire d'une orbite. Cependant, nous ne parlons pas ici de prédiction temporelle d'une orbite, sinon d'une dépendance extrême sur les conditions initiales que les structures fractales imposent dans l'espace de phases, de telle sorte qu'il se produit une obstruction de la prédiction finale de l'état final du système. Dans cet article, différentes situations physiques sont décrites.

1 Introduction

> Il ya plus d'individus qui naissent que ceux pouvant survivre. Un grain dans la balance déterminera quel individu vivra et celui qui mourera, quelle variété ou quell espèce augmentera en nombre, et celle qui diminuera, ou celle qui finalement s'éteindra.
> —Darwin, *L'origine des espèces*, ch. 14, 1859

Habituellement le phénomène de dispersion chaotique est associé à la dynamique des systèmes hamiltoniens ouverts avec des propriétés chaotiques. En général, une particule se déplace avec un mouvement de va-et-vient pendant un certain temps dans une région bornée appelée région de dispersion, et s'échappe par la suite vers l'infini par une des sorties existantes. Les systèmes hamiltoniens bidimensionnels ont été étudiés par de nombreux chercheurs, qui ont modelé ces différents phénomènes physiques. L'analyse de l'échappement des étoiles dans les galaxies [1], la dynamique des ions dans les pièges électromagnétiques [2], ou l'interaction entre la queue magnétique de la terre et du vent solaire, en sont quelques applications [3]. Toutes ces applications sont des manifestations de la dispersion chaotique, qui comprend principalement l'intéraction d'une particule avec un système qui le disperse, de telle sorte que les conditions finales de la vitesse et de la direction possèdent une dépendance extrême à l'égard des conditions initiales, ce qui est un signe de comportement chaotique.

En général, il y a une valeur-seuil de l'énergie, qui s'appelle l'énergie d'échappement. Au-dessous de cette valeur-seuil, les orbites sont liées et les particules situées dans la région de dispersion ne peuvent pas s'échapper. Cependant, quand l'énergie est au-dessus de cette valeur-seuil, plusieurs sorties apparaissent et les particules peuvent s'échapper vers l'infini par n'importe quelle d'entre elles.

Lorsque nous venons à considérer un système hamiltonien, toute l'énergie y est conservée, et par conséquent, nous ne pouvons pas parler d' attracteurs, ni de bassins d'attraction. Un bassin d'attraction est défini comme l'ensemble des conditions initiales qui sont attirées vers un certain attracteur, et elles existent seulement dans les systèmes dissipatifs. Quand deux attracteurs coexistent dans une certaine région de l'espace de phase, nous avons deux bassins, qui sont séparés par une frontière de bassin. Cette frontière de bassin pourrait être une courbe, mais elle peut également être un fractal. Tandis que nous ne pouvons pas parler d'attracteurs dans les systèmes hamiltoniens, nous pouvons parler de bassins d'échappement ou de sortie d'une façon analogue à ce qui signifie les bassins d'attraction pour les systèmes dissipatifs.

Un bassin de sortie est l'ensemble de conditions initiales menant à une certaine sortie. Ces bassins ne pourraient pas être seulement fractals, car il est possible qu'ils possèdent la propriété plus forte de Wada [4, 5]. Nous disons qu'un bassin vérifie la propriété de Wada, qui pourrait tenir quand il existe au moins trois bassins, quand n'importe lequel de ses points de frontière appartient simultanément à la frontière des deux autres bassins. Ainsi, si un système dynamique vérifie la propriété de Wada, l'imprévisibilité est encore plus grande que lorsque'il y a seulement des frontières de bassin fractals. Si une trajectoire commence très près d'un point de frontière, il ne sera pas possible de prévoir à l'avance son futur comportement, puisque ses conditions initiales pourraient appartenir à n'importe lequel de ces trois bassins.

Le premier exemple d'un système avec cette propriété topologique a été rapporté par le mathématicien japonais Yoneyama en 1917 [6], qui a attribué l'idée à un certain M. Wada. Yoneyama a pris le nom de cette personne, pour indiquer ce qui est connu maintenant comme les "lacs de Wada", qui est un exemple plutôt utile de la façon d'établir trois régions ayant cette propriété. Logiquement, les frontières de ces ensembles vérifient des propriétés topologiques très peu communes. Topologiquement, la propriété de Wada est associée au concept du continu indécomposable [4, 7, 8, 9]. De tels ensembles indécomposables sont des ensembles compacts, métriques et connexes qui ont l'étrange proprieté que lorsqu'on essaye de les diviser en deux pièces, on se trouve devant un nombre infini de pièces. De plus, si un système dynamique vérifie la propriété de Wada, l'imprévisibilité est encore plus grande que dans le cas où seulement on trouve des frontières de bassin fractales.

Une très belle expérience montrant la propriété de Wada a été récemment rapportée [10] dans un système optique possédant la dispersion chaotique.

2 Bassins de Wada dans le système de Hénon-Heiles

En particulier, nous étudions les bassins de sortie du Hénon-Heiles hamiltonien, qui est bien connu comme modèle d'une galaxie axisymétrique [11]. Le système de Hénon-Heiles est fourni par l'équation

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3, \tag{1}$$

et constitue un paradigme pour la dynamique non-linéaire des systèmes hamiltoniens. Il s'agit d'un système dynamique indépendant du temps bidimensionnel, possèdant trois sorties différentes pour des orbites au-dessus de l'énergie d'échappement, ayant une symétrie de rotation $2\pi/3$. D'ailleurs, la dynamique associée est tout à fait imprévisible, puisque la frontière séparant leurs bassins de sortie n'est pas une courbe lisse.

Nous avons trouvé que le système de Hénon-Heiles possède des bassins de Wada. En outre, nous croyons que la propriété de Wada est une caractéristique générale pour les systèmes hamiltoniens bidimensionnels ouverts avec trois ou plus sorties d'echappement. En fait, ce genre de modèles est largement répandu pour la modèlisation de nombreux problèmes astrophysiques, et les idées fondamentales d'application sont présentes dans un certain genre de chaos transitoire.

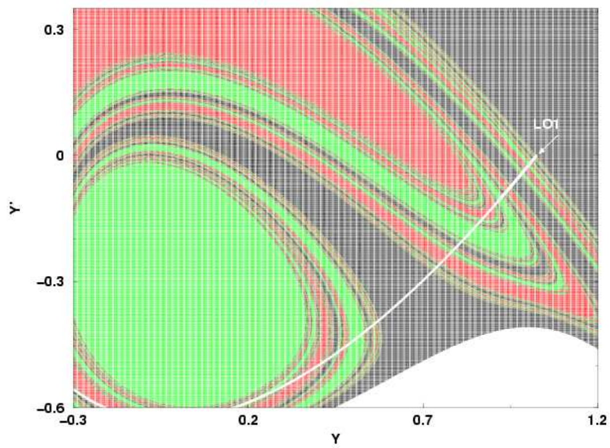

FIG. 1 – *La variété instable de la seule orbite périodique instable accessible croise tous les bassins dans ce zoom du diagramme de bassin de sortie du système. Par conséquent, l'hamiltonien de Hénon-Heiles vérifie la propriété de Wada [12].*

3 Bassins de Wada dans l'oscillateur de Duffing

Un autre objectif de cet article est de prouver que *l'oscillateur de Duffing* présente la propriété de Wada [13]. L'oscillateur de Duffing est un modèle bien connu d'un oscillateur non-linéaire, et il est applicable à modeler beaucoup de systèmes de la science et de la technologie. En réalité, on le considère comme paradigme pour la dynamique non-linéaire des systèmes dissipatifs.

L'oscillateur de Duffing peut être utilisé comme modèle du mouvement unidimensionnel d'une particule de masse unité à l'intérieur d'un potentiel symétrique de double puits, avec une dissipation et un forçage périodique externe. L'équation que nous avons employée est la suivante:

$$\ddot{x} + \delta\, \dot{x} - \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos \omega t. \tag{2}$$

La variable $x(t)$ représente la position en fonction du temps t, où δ est le coefficient d'amortissement. Les autres paramètres γ et ω représentent l'amplitude et le forçage externe. Les paramètres que nous utilisons ici sont $\delta = 0.15$, $\alpha = \beta = \omega = 1$ et γ est variable. La région de variation de l'amplitude est $0.24 \leq \gamma \leq 0.26$, où **trois attracteurs coexistent** dans l'espace des phases.

Comme il a été auparavant commenté, une des conséquences principales du fait que ces systèmes possèdent des bassins de Wada est la difficulté intrinsèque pour prévoir, de telle manière que nous ne pouvons pas savoir à l'avance à quel attracteur les systèmes sont attirés pour un état initial donné. Ceci a une énorme importance, puisque nous sommes habitués à l'idée du déterminisme classique, où une fois qu'un premier état est fixé, automatiquement nous savons l'évolution de l'orbite. D'un point de vue expérimental, il n'est pas possible de fixer un premier état avec la précision arbitrairement élevée, et par conséquent, un problème sérieux se pose pour la prévision des systèmes physiques.

Ces idées supposent en fait un défi aux idées classiques du déterminisme. Une discussion intéressante autour des conséquences physiques se dérivant de la nature de certaines frontières de bassin fractales et la prévisibilité de systèmes physiques apparaît dans [14].

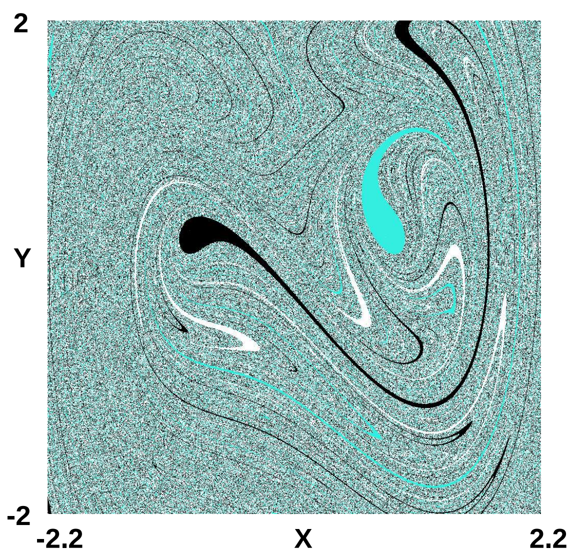

FIG. 2 – *La figure montre un diagramme d'un bassin d'attraction de l'oscillateur de Duffing. Une maille de* 960×960 *des points initiaux est considérée et des couleurs différentes sont choisies pour indiquer à quel attracteur une condition initiale est conduite.*

4 Les applications dans la physique et dans d'autres sciences appliquées

Comme il a été mentionné précédemment, aussi bien les systèmes hamiltoniens que les systèmes dissipatifs, peuvent possèder la propriété de Wada, avec des conséquences similaires concernant l'imprévisibilité de l'état final du système. Il y a des résultats confirmant que la propriété s'applique aussi pour le pendule forcé [4], dans un modèle de trois billards [15], dans les problèmes de l'advection chaotique [16, 17] des fluides et dans les modèles écologiques [18]. Aussi, dans le domaine de la physique des plasmas, on a découvert des applications de ces idées [19]. Il y a des applications très intéressantes en relation avec

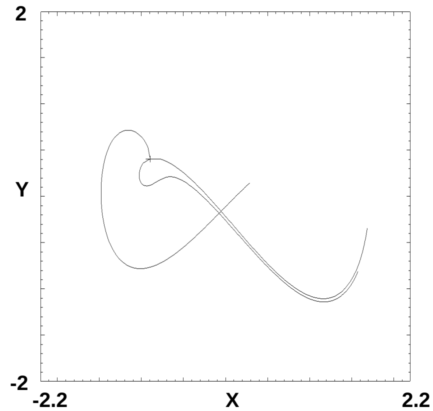

FIG. 3 – *La figure montre la variété stable et instable de l'unique orbite instable accesible du bassin noir. Si on compare cette figure avec la figure 2, on peut constater que la varieté instable coupe tous les bassins, et pourtant le bassin noir possède la propriété de Wada. De cette façon, on arrive à tous les autres bassins.*

la compétition des multi-espèces [20], lequel est un domaine très actif de recherche en écologie et en biodiversité. Dans ce domaine, une forte imprévisibilité au sujet des espèces de survie est présente. Ceci explique peut-être la citation de Darwin.

5 D'autres problèmes

Une autre idée d'application consiste à analyser le comportement des systèmes dynamiques discrets que conservent l'air, et qui sont des prototypes des systèmes hamiltoniens continus. L'idée consiste à "ouvrir" des systèmes fermés, qui physiquement peuvent être interprétés comme une intéraction avec le monde extérieur. Par conséquent, l'espace des phases se fractalise, et lorsque la taille des "creux" tend vers zéro, on a une fractalisation complète, qui entraîne la perte totale d'information sur le futur du système [21]. Comme continuation naturelle au travail effectué sur les systèmes hamiltoniens, nous avons également exploré un nouveau type de bassins, que nous appelons les bassins incertains. Nous croyons que lorsque la taille des sorties diminue en tendant vers zéro, alors l'imprévisibilité augmente énormément, de telle manière que les informations sur le futur de ces systèmes sont perdues. C'est la première fois qu'un tel phénomène est décrit pour les systèmes hamiltoniens [22].

6 Conclusions

Deux systèmes dynamiques paradigmatiques dans la dynamique non-linéaire sont étudiés, l'un d'eux est un système hamiltonien, le système de Hénon-Heiles, et l'autre dissipatif, l'oscillateur de Duffing. Nous prouvons que tous les deux possèdent des bassins de Wada, affectant l'imprévisibilité de l'état final du système, de telle manière qu'afin de prévoir son état final, dans certains cas seulement l'approche probabiliste est possible.

D'ailleurs, plusieurs problèmes non résolus montrent l'intérêt d'explorer ces structures fractales dans d'autres systèmes dynamiques, afin de clarifier leurs conséquences physiques.

Remerciements

Ce travail de recherches a bénéficié de l'aide de nombreuses discussions intéressantes et fructueuses avec des nombreux scientifiques. Nous souhaitons citer James A. Yorke, Judy Kennedy, George Contopoulos, Eric Kostelich, Elbert E. Macau, Takehiko Horita, Kazuyuki Aihara, Celso Grebogi, Juergen Kurths, Oleksandr Popovych, Tamas Tél, Ricardo Viana, Ibere Caldas, Rainer Klages, Fred Feudel, Kunihiko Kaneko, Misha Zaks, Suso Kraut et Mathias Brack. Nous sommes très reconnaissants pour l'aide financière fournie par le Ministère de la Science et de la Technologie de l'Espagne sous le projet BFM2000-0967, et de l'Université Rey Juan Carlos sous les projets URJC-PGRAL-2001/02 et URJC-PIGE-02-04.

Références

[1] G. Contopoulos, H. E. Kandrup and D. Kaufman, *Physica* **D64**, 310 (1993).
[2] G. Z. K. Horvath, J. L. Hernández Pozos, K. Dholakia, J. Rink, D. M. Segal and R. C. Thompson, *Phys. Rev.* **A57**, 1944 (1998).
[3] J. Chen, J. L. Rexford and Y. C. Lee, *Geophys. Res. Lett.* **17**, 1049 (1990).
[4] J. Kennedy and J. A. Yorke, *Physica* **D51**, 213 (1991).
[5] H. E. Nusse and J. A. Yorke, Science **271**, 1376 (1996).
[6] K. Yoneyama,*Tohoku Math. J.* **11-12**, 43 (1917).
[7] M. A. F. Sanjuán, J. Kennedy, C. Grebogi, and J. A. Yorke, 'Indecomposable Continua in Dynamical Systems with Noise: Fluid Flow past an Array of Cylinders', Chaos **7**, 125-138 (1997).
[8] M. A. F. Sanjuán, J. Kennedy, E. Ott, and J. A. Yorke, 'Indecomposable Continua and the characterization of strange sets in Nonlinear Dynamics', Phys. Rev. Lett. **78**, 1892-1895 (1997).
[9] J. Kennedy, M. A. F. Sanjuán, J. A. Yorke, and C. Grebogi, 'The topology of fluid flow past a sequence of cylinders', Topology and its Applications **94**, 207-242 (1999).
[10] D. Sweet, E. Ott, and J. A. Yorke, *Nature* **399**, 315 (1999).
[11] M. Hénon and C. Heiles, *Astron. J.* **69**, 73 (1964).
[12] J. Aguirre, J.C. Vallejo and M.A.F. Sanjuán, *Phys. Rev.* **E64**, 066208 (2001).
[13] J. Aguirre and M.A.F. Sanjuán, *Physica* **D171**, 41 (2002).
[14] J. Sommerer, *Johns Hopkins APL Tech. Dig.* **16(4)**, 333 (1995).
[15] L. Poon, J. Campos, E. Ott and C. Grebogi, *Int. J. Bifurcation Chaos* **6**, 251 (1996).
[16] Z. Toroczkai, G. Karoly, A. Pentek, T. Tel, C. Grebogi and J.A. Yorke, *Physica* **A239**, 235 (1997).
[17] A. Witt, R. Braun, F. Feudel, C. Grebogi and J. Kurths, *Phys. Rev.* **E59**, 1605 (1999).
[18] J. Vandermeer, L. Stone, and B. Blasius, *Chaos, Solitons and Fractals* **12**, 265 (2001).
[19] Elton C. da Silva, Ibere L. Caldas, Ricardo L. Viana and Miguel A. F. Sanjuán,*Physics of Plasmas* **9**, 4917-4928 (2002).
[20] J. Huisman and F. J. Weissing, *The American Naturalist* **157**, 488 (2001).
[21] Miguel A. F. Sanjuán, Takehiko Horita and Kazuyuki Aihara, *Chaos* **13**, 17-24 (2003).
[22] J. Aguirre and M.A.F. Sanjuán, Preprint-2003.