

# Incertidumbre Clásica, Dispersión Caótica y Estructuras Fractales en Física

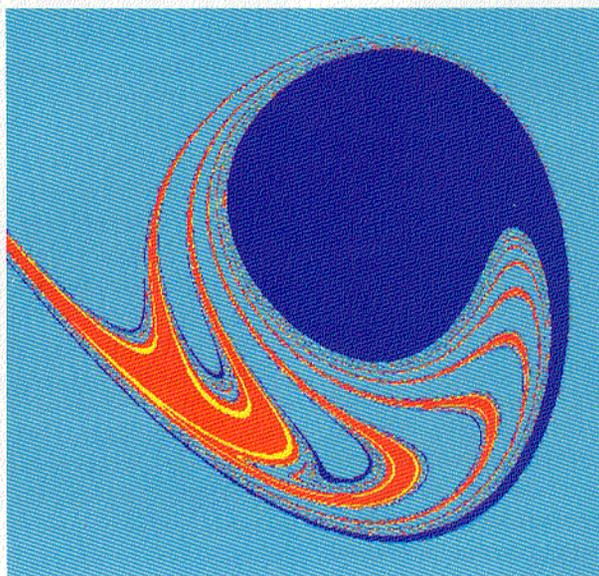
Jacobo Aguirre y Miguel A. F. Sanjuán

*The Hénon-Heiles hamiltonian system is studied in the context of chaotic scattering, for a range of energies where escapes of particles are possible. By using computational techniques, its invariant manifolds are analyzed, and it is shown that its fractal basins have the property of Wada. This strange property, of topological nature, is verified when a set shares its boundary with at least three other sets, and it supposes a higher limitation to our capacity for prediction than in the case that the boundaries are simply fractal. This system shows the intrinsic uncertainty in a simple physical system of classical nature.*

## 1. Introducción

Dentro de la tradición de la Física, las ideas de incertidumbre nos han sido transmitidas usualmente asociadas a la Mecánica Cuántica, en particular al principio de incertidumbre de Heisenberg, dando casi siempre por sentado el carácter predictivo y completamente determinista de la Mecánica Clásica. Una vez planteado el problema de la incertidumbre, resulta natural preguntarse por sus orígenes y su naturaleza. En realidad, algunos de los creadores de la Mecánica Cuántica se preocuparon por la posible repercusión de las ideas de incertidumbre en el campo de la Mecánica Clásica. De hecho, el efecto de la dependencia sensible a las condiciones iniciales fue puesto de manifiesto en tiempos recientes por el físico alemán Max Born en un artículo muy poco conocido escrito en 1955 titulado *Is Classical Mechanics in fact deterministic?* [1]. El modelo que tenía en mente es el conocido gas de Lorentz bidimensional, propuesto por el físico holandés H. A. Lorentz (1853-1928) en 1905 [2] como modelo para la conductividad de los metales y que se usa incluso hoy día como uno de los modelos fundamentales de la Mecánica Estadística del No Equilibrio. Se trata de un sistema dinámico muy inestable, donde una partícula se mueve entre un conjunto de obstáculos fijos circulares. Es claro que la menor de las desviaciones en las condiciones iniciales llevaría a un estado ulterior completamente diferente. Born concluyó que en realidad el determinismo de la Mecánica Clásica resulta ser de una falsa apariencia, debido al hecho de que no es posible determinar con absoluta precisión las condiciones iniciales de un sistema físico dado. Similares reflexiones fueron realizadas también en la misma época por el célebre físico austriaco y premio Nobel de física Erwin Schrödinger.

Es de destacar de igual modo que estas ideas, ciertamente poco conocidas e ignoradas por muchos durante mucho



tiempo, se encuentran asimismo expuestas en el famoso libro del también premio Nobel de física Richard Feynman [3], donde el autor argumenta con su incomparable estilo que la incertidumbre no es un requisito propio de la Mecánica Cuántica asociado al famoso principio de Heisenberg, sino que se trata de una característica consubstancial a la incertidumbre en la determinación de las condiciones iniciales de muchos problemas de la Mecánica Clásica.

Muchos sistemas dinámicos no lineales poseen la propiedad de la *dependencia sensible a las condiciones iniciales*, de modo que no

resulta posible predecir su evolución a largo plazo, porque en la práctica siempre existen errores en la determinación de estas condiciones iniciales. Esto provoca una separación exponencial en el tiempo de las trayectorias, lo que lleva a la incertidumbre final. Es precisamente este tipo de movimiento el que recibe el nombre de *caótico*. La idea básica de la incertidumbre en el lanzamiento de una moneda o un dado podría estar ligada a la noción de la *dependencia sensible a las condiciones iniciales* si tenemos en cuenta que no son más que sólidos rígidos.

La dispersión caótica consiste en la interacción de una partícula con un sistema que la dispersa, de forma que las condiciones finales de velocidad y dirección de dicha partícula dependen sensiblemente de sus condiciones iniciales (véase Ref. [4] para un estudio detallado de este fenómeno).

La dispersión caótica se asocia a la dinámica de sistemas hamiltonianos abiertos que poseen propiedades caóticas. Los sistemas hamiltonianos abiertos son aquellos en los que una partícula, que conserva la energía, puede tener un movimiento errático durante un tiempo dentro de una zona acotada llamada *región de dispersión*, hasta que finalmente escapa hacia el infinito atravesando una de las posibles salidas. Muchos estudios recientes se han centrado en estos sistemas, y la principal razón es que la dispersión caótica está siendo

utilizada para modelizar numerosos fenómenos en campos muy distintos. Algunas aplicaciones a destacar son el análisis del escape de estrellas de potenciales galácticos [5, 6], la dinámica de iones atrapados en trampas electromagnéticas [7], la interacción entre la cola magnética de la Tierra y el viento solar [8], o algunas aplicaciones en el contexto de la relatividad general [9], por citar unas pocas.

Cuando el sistema dispersor se modeliza mediante un potencial, para energías por debajo de un cierto valor umbral comúnmente conocido como *energía de escape*, las órbitas están acotadas y las partículas no pueden escapar de la llamada región de dispersión. Sin embargo, si la energía es superior a este valor umbral aparecen varias salidas y es posible escapar al infinito a través de cualquiera de ellas.

Una *cuenca de escape* de un sistema hamiltoniano abierto se define como el conjunto de condiciones iniciales que dan lugar a órbitas que escapan del sistema por una determinada salida. Evidentemente, tendremos tantas cuencas de escape como salidas existan en el sistema, y éstas estarán separadas por una frontera. Esta frontera puede ser suave (de dimensión entera) o fractal (de dimensión no entera), como mostraron por vez primera S. Bleher *et al.* [10]. Si la frontera es fractal, la dinámica del sistema es en cierta medida impredecible, ya que la frontera que separa una cuenca de otra no está claramente definida.

En el presente trabajo, fijamos la atención en el análisis de las cuencas de escape del hamiltoniano de Hénon-Heiles, un modelo muy conocido para una galaxia axisimétrica, y que se ha convertido con el tiempo en un paradigma de la dinámica no lineal hamiltoniana. Se trata de un sistema bidimensional independiente del tiempo, y posee tres salidas para órbitas con mayor energía que la de escape. Por una parte, prestamos especial atención a sus conjuntos invariantes, y por otra obtenemos evidencias numéricas de que las cuencas que aparecen en este sistema no son únicamente fractales, sino que poseen además la muy peculiar propiedad de Wada [11-16], lo que significa que cualquier punto de su frontera pertenece también a la frontera de al menos otras dos cuencas.

## 2. Estudio del sistema de Hénon-Heiles

El sistema de Hénon-Heiles fue estudiado por primera vez por los astrónomos M. Hénon y C. Heiles en 1964 [17], con la finalidad de analizar si existen dos o tres cantidades conservadas en la dinámica galáctica. Un sistema con un potencial galáctico axisimétrico e independiente del tiempo, posee un espacio de fases de 6 dimensiones. Como existen 6 variables, podemos encontrar 5 integrales conservadas independientes, algunas de ellas aislantes (*isolating*) y otras no aislantes (*non isolating*), siendo estas últimas físicamente irrelevantes. Una integral aislante es aquella cantidad conservada que limita el movimiento de la partícula a una región restringida del espacio de fases. La cuestión que estos dos astrónomos intentaban resolver es qué parte de este espacio de fases 6D se llena con la trayectoria de una estrella con el paso del tiempo. Por esa época ya era evidente que la energía total  $E_T$  y la componente- $z$  del momento angular  $L_z$  eran integrales aislantes, mientras que otras dos eran no aislantes. Por lo tanto, el verdadero objetivo consistía en encontrar una tercera cantidad conservada. Para resolver este enigma, Hénon y Heiles propusieron un potencial 2D, y descubrieron que existe una tercera integral aislante, que aparece únicamente para ciertas condiciones iniciales. De hecho, el hamiltoniano de Hénon-Heiles es uno de los primeros ejemplos que muestran cómo sistemas muy simples pueden poseer una dinámica muy compleja, y desde que fue propuesto ha sido exhaustivamente estudiado como paradigma de los hamiltonianos 2D independientes del tiempo.

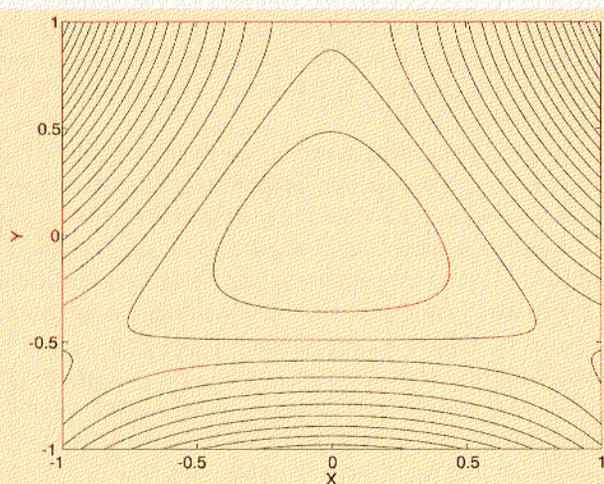
El hamiltoniano de Hénon-Heiles posee una simetría de rotación de  $2\pi/3$  (triangular), y se expresa de la siguiente forma:

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3. \quad (1)$$

Este hamiltoniano ha sido muy estudiado en el rango de energías por debajo de la energía de escape ( $E_e = 1/6$ ), donde las órbitas están acotadas y aparece una gran variedad de movimientos tanto periódicos como caóticos. Por otra parte, si la energía excede el valor umbral de la energía de escape  $E_e$ , las trayectorias pueden escapar de la región acotada y avanzar hacia el infinito a través de tres salidas distintas. Debido a la simetría triangular, las salidas están separadas un ángulo  $2\pi/3$  radianes, y se denominará de ahora en adelante salida 1 a la superior ( $y \rightarrow +\infty$ ), salida 2 a la de la izquierda ( $y \rightarrow -\infty, x \rightarrow -\infty$ ), y salida 3 a la de la derecha ( $y \rightarrow -\infty, x \rightarrow +\infty$ ) (véase la Fig. 1).

### A. Cuencas de Wada

Uno de los principales objetivos de este trabajo es mostrar que las cuencas de escape del hamiltoniano de Hénon-Heiles y otros ejemplos relacionados de dispersión caótica no son únicamente fractales, sino que además verifican la propiedad de Wada. Aunque es difícil de imaginar, es posible tener tres conjuntos compartiendo la misma frontera. En general, tres regiones en dos dimensiones (por ejemplo tres países) pueden coincidir únicamente en un punto, pero topológicamente esto no es necesariamente cierto para conjuntos abiertos. Si se habla de cuencas, una cuenca  $B$  verifi-



**Figura 1.** Curvas isopotenciales para el potencial de Hénon-Heiles. Son cerradas para energías por debajo de  $E_e = 1/6$ , mientras que muestran tres salidas cuando la energía cruza este valor umbral.

ca la propiedad de Wada si cualquier condición inicial que se encuentra en la frontera de una cuenca está a la vez en la frontera de otras dos cuencas (o más). En otras palabras, todo conjunto abierto centrado en un punto  $x$  que pertenezca a una frontera Wada tiene una intersección no nula con al menos tres cuencas distintas.

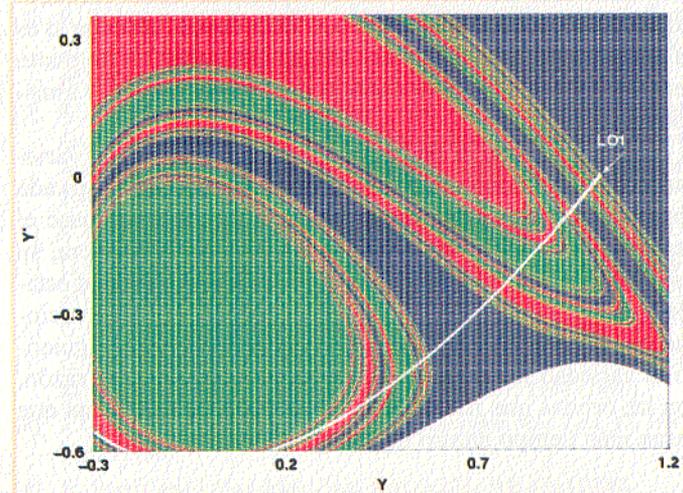
El primer ejemplo de un sistema con esta propiedad lo propuso el matemático japonés Yoneyama en 1917 [11], quien a su vez lo atribuía al Sr. Wada, de quien tomó el nombre. Los "Lagos de Wada" son un ejemplo útil de cómo construir "con lápiz y papel" tres regiones que verifican esta propiedad, y vienen extensamente explicados en [11, 19-21]. Lógicamente, las fronteras de estos conjuntos deben cumplir ciertas propiedades matemáticas muy inusuales. Topológicamente, la propiedad de Wada está asociada al concepto de continuo indecomponible [11, 19-21]. Dichos continuos indecomponibles son conjuntos compactos y conexos con la extraña propiedad de que cuando se los intenta separar en dos partes, se dividen necesariamente en infinitas partes distintas.

Por todo esto, si un sistema dinámico verifica la propiedad de Wada, la impredecibilidad asociada es aún mayor que si presentara únicamente fronteras fractales. En nuestro caso, si una trayectoria nace cerca de un punto de la frontera, no nos será posible predecir cuál de las tres salidas existentes elegirá para escapar, ya que sus condiciones iniciales podrían pertenecer a cualquiera de las tres cuencas. A pesar de todo, numerosos sistemas dinámicos verifican esta propiedad, y entre ellos destacan el péndulo forzado y amortiguado, la aplicación de Hénon para algunos valores de sus parámetros [11, 12] o incluso el oscilador de Duffing, como mostramos en [22]. Además, se probó en [23] que la propiedad de Wada se verifica en una configuración triangular de tres bolas de billar, y se conjeturó que quizás se trate de una cualidad típica de la dispersión caótica. Otras recientes aplicaciones de esta propiedad tienen que ver con la Física de Plasmas [24] y con los sistemas dinámicos hamiltonianos discretos abiertos [25]. Finalmente, en [26] se presentó una reciente verificación experimental "casera" de la propiedad de Wada, basada en la reflexión de luz de diferentes colores por cuatro bolas de navidad formando un tetraedro. Este último trabajo fue de hecho portada de la revista *Nature*.

### B. Condiciones computacionales para verificar la propiedad de Wada

La verificación numérica de la propiedad de Wada por parte de una cuenca  $B$  presenta diversas dificultades que deben solventarse, ya que como ya hemos comentado la topología detrás de esta propiedad no es trivial. En [11, 12] se realizó un análisis pormenorizado de este tema, y se propusieron ciertas condiciones computacionales que aseguran que una cuenca es Wada. Simplificando, la condición principal es encontrar una órbita  $P$  periódica inestable, accesible desde la cuenca  $B$ , de forma que su variedad inestable corte tres cuencas distintas. La condición secundaria es que, en caso de que exista más de una órbita periódica accesible, todas las variedades inestables de estas órbitas corten todas las cuencas (Teorema 1 de [12]). Pero para entender estas dos condiciones necesitamos un par de definiciones previas. Primero, un punto  $p$  es *accesible* desde una cuenca dada

cuando se puede dibujar una curva, comenzando en el interior de dicha cuenca, de forma que este punto  $p$  sea el primer punto de la frontera que toca la curva. Segundo, la *variedad inestable* de una órbita inestable está formada por todas las condiciones iniciales que iteradas hacia atrás en el tiempo, tienden a dicha órbita.



**Figura 2.** Detalle del diagrama de cuencas de escape para el sistema de Hénon-Heiles y  $E = 0.25$ . Muestra  $1000 \times 1000$  condiciones iniciales dadas por  $x = 0$ ,  $y = (-0.3, 1.2)$  e  $y' = v \cdot \cos \theta$ , donde  $v$  es la velocidad inicial y  $\theta$  el ángulo de disparo. Las condiciones iniciales negras representan órbitas que escapan a través de la salida 1 (cuenca 1), las rojas escapan por la salida 2 (cuenca 2) y las verdes escapan por la salida 3 (cuenca 3). La variedad inestable de la única órbita periódica inestable accesible (señalada con LO1) cruza todas las cuencas. Por lo tanto el hamiltoniano de Hénon-Heiles verifica la propiedad de Wada.

La Fig. 2 muestra que efectivamente la variedad inestable de la única órbita periódica inestable accesible desde la cuenca 1 cruza todas las cuencas del sistema. En consecuencia, con ayuda de suficientes evidencias numéricas, podemos afirmar que la cuenca 1, formada por las condiciones iniciales de las órbitas que escapan hacia  $y \rightarrow \infty$ , satisface la propiedad de Wada (para más detalles conviene consultar [27]). Se puede utilizar el mismo razonamiento para las otras dos cuencas, ya que como se ha señalado anteriormente, el hamiltoniano de Hénon-Heiles posee simetría triangular.

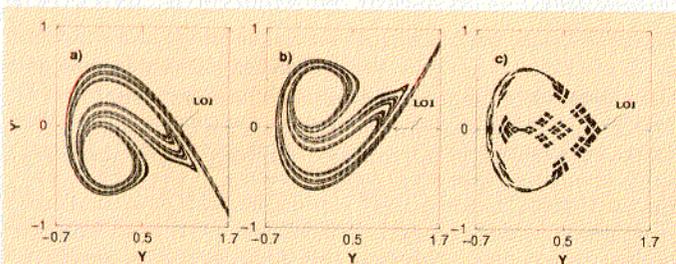
### C. Conjuntos invariantes

Los sistemas en los que aparecen movimientos caóticos no atractivos son muy frecuentes, y el hamiltoniano de Hénon-Heiles para energías por encima de la de escape es un buen ejemplo de este fenómeno. Los conjuntos invariantes asociados a este hamiltoniano nos proporcionan mucha información acerca de las propiedades dinámicas del sistema. En este apartado queremos mostrar los cálculos del conjunto caótico invariante, su variedad estable y su variedad inestable, así como las dimensiones de cada uno de estos conjuntos en función del valor de la energía.

El conjunto caótico invariante está formado por un conjunto de órbitas de medida de Lebesgue cero que no escapan de la región de dispersión ni cuando  $t \rightarrow \infty$  ni cuando  $t \rightarrow -\infty$  [14]. Su variedad estable contiene las órbitas que no escapan

cuando  $t \rightarrow \infty$ , mientras que su variedad inestable está formada por aquéllas que no lo hacen cuando  $t \rightarrow -\infty$ . Las órbitas que constituyen el conjunto caótico invariante son órbitas inestables periódicas y aperiódicas. Además, este conjunto está formado por la intersección de su variedad estable e inestable, que son a su vez dos conjuntos fractales cuya dimensión está entre 2 y 3 en un espacio de fases tridimensional. Como ambos conjuntos son invariantes, también lo es su intersección, por lo que las órbitas que nacen en un punto perteneciente al conjunto caótico invariante, jamás lo abandonan.

La frontera fractal de las cuencas coincide con la variedad estable del conjunto caótico, y por lo tanto está formada por las trayectorias que jamás escapan del sistema, pase el tiempo que pase. Si una órbita nace cerca de la frontera, su trayectoria avanzará lentamente siguiendo una variedad estable hacia un punto silla del conjunto caótico, en cuya vecindad pasará largo tiempo antes de escapar del sistema siguiendo la variedad inestable de dicho punto silla. Por esa razón, son las órbitas que nacen cerca de la frontera fractal las que pasan más tiempo dentro de la región de dispersión.



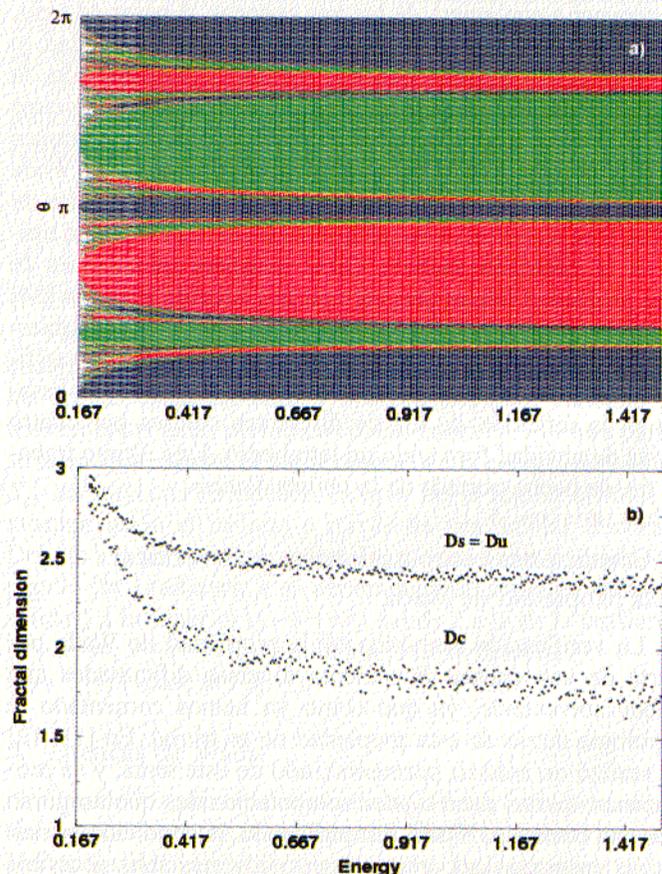
**Figura 3.** Variedad estable (a), variedad inestable (b) y conjunto caótico invariante (c) del sistema de Hénon-Heiles para  $E = 0.25$ . Las condiciones iniciales son  $(y, \dot{y})$ , con una fina red de  $2000 \times 2000$  puntos. Las flechas señalan la órbita periódica accesible de la Fig. 2.

Como ya se mencionó anteriormente, la dimensión de ambas variedades fractales está entre 2 y 3, por lo que sólo podrá representarse su intersección con un plano dado que conocemos como sección de Poincaré. La Fig. 3 muestra la sección de Poincaré de la variedad estable, la variedad inestable y el conjunto caótico para  $E = 0.25$ . Es fácil observar que la intersección de la variedad estable y la inestable coincide con el conjunto caótico invariante, y que ambas variedades son simétricas. Esta simetría se debe a que el hamiltoniano de Hénon-Heiles es conservativo e invariante ante una transformación de inversión temporal ( $t \rightarrow -t, v \rightarrow -v$ ). Si se compara esta figura con su correspondiente diagrama de escape (Fig. 2), se comprueba que la variedad estable realmente coincide con las fronteras fractales.

La Fig. 4(a) muestra el decrecimiento del tamaño de las cuencas de escape fractales a medida que aumenta el valor de la energía, es decir, a medida que aumenta el tamaño de las tres salidas. De forma más cuantitativa, la dimensión fractal de incertidumbre [28] para cada valor de  $E$  viene reflejada en la Fig. 4(b). Cabe destacar que la dimensión de los tres conjuntos invariantes tiende a 3, es decir, la dimensión total del espacio de fases, cuando la energía tiende a su valor mínimo  $E_e = 1/6$  y las salidas se hacen infinitamente

pequeñas. Esto significa que para ese valor crítico existe una fractalización total del espacio de fases, volviéndose “denso” el conjunto caótico invariante en el límite. Por lo tanto, en dicho límite ya no quedan conjuntos “suaves” de condiciones iniciales (véase la Fig. 4(a)) y las únicas estructuras reconocibles son los llamados toros KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) que están compuestos de órbitas cuasiperiódicas que nunca escapan del sistema aunque tengan energía para hacerlo (y que además existen únicamente para  $E < 0.2$ ). Cuando aumenta la energía, aparecen los diferentes conjuntos suaves de condiciones iniciales y tienden a crecer, mientras que las estructuras fractales que coinciden con la frontera entre cuencas disminuyen.

La fractalidad en el hamiltoniano de Hénon-Heiles se mantiene para todo valor de la energía, tal y como se observó en [29], mientras que en otros muchos hamiltonianos 2D ésta desaparece cuando la energía alcanza un determinado valor. En nuestro caso, las dimensiones de la variedad estable  $D_S$  e inestable  $D_U$  tienden a 2.2 cuando  $E \rightarrow \infty$ , y por lo tanto  $D_S = D_U \in (2.2, 3)$  (donde  $D = 2$  significa no fractalidad y  $D = 3$  máxima fractalidad). A su vez, la dimensión del conjunto caótico invariante  $D_C$  tiende a 1.4 cuando  $E$  aumenta, y  $D_C \in (1.4, 3)$  (donde  $D = 1$  significa no fractalidad y  $D = 3$  máxima fractalidad).



**Figura 4.** (a) Evolución de las cuencas de escape para diferentes valores de la energía. Las condiciones iniciales son  $(x = 0, y = 0)$  y  $\theta \in (0, 2\pi)$ . La cuenca 1 es dibujada en negro, la cuenca 2 en gris oscuro y la cuenca 3 en verde. (b) Dimensión fractal de los conjuntos invariantes para diferentes valores de la energía:  $D_S = D_U$  para las variedades estable e inestable,  $D_C$  para el conjunto caótico invariante.

#### D. Generalizando los resultados: las cuencas inciertas

Los resultados que se acaban de presentar para el sistema de Hénon-Heiles y que se ven reflejados en la Fig. 4, nos han llevado a realizar un estudio general de la evolución de la naturaleza de todos los sistemas hamiltonianos abiertos cuando el tamaño de las salidas disminuye y tiende a cero. Aún sin querer ahondar en este nuevo campo, ampliamente desarrollado en [30], nos parece de interés presentar el principal resultado de este estudio:

*En el límite de las salidas infinitamente pequeñas, los conjuntos invariantes de todos los sistemas hamiltonianos abiertos, es decir, el conjunto caótico invariante y sus variedades estable e inestable, tienden a llenar físicamente la totalidad del espacio de fases.*

Una consecuencia directa de este fenómeno es que cuando las salidas se hacen muy pequeñas, las cuencas de escape sufren una absoluta fractalización, tendiendo a confundirse con sus propias fronteras. De esta forma se convierten en un nuevo tipo de cuencas, que nosotros hemos denominado *cuencas inciertas* por sus dramáticas consecuencias en la capacidad de predicción. Nuestro resultado explica también la tendencia de la dimensión fractal de los tres conjuntos invariantes a alcanzar el valor de la dimensión del espacio de fases en semejante límite, idea conjeturada por [29], y que claramente se observa en la Fig. 4(b). Las cuencas inciertas que se presentan aquí se asemejan en muchos sentidos a las llamadas cuencas agujereadas (*riddled basins*), una propiedad muy particular relacionada con las cuencas fractales, pero que aparecen únicamente en el contexto de los sistemas disipativos, es decir, aquéllos que en oposición a los hamiltonianos, no conservan la energía.

#### Conclusiones

En esta investigación hemos estudiado en detalle la dinámica del hamiltoniano de Hénon-Heiles, en el rango de energías para el cual existen tres posibles salidas. En particular, hemos calculado las cuencas de escape y sus conjuntos invariantes, haciendo un análisis general de dicho sistema desde la óptica de la dispersión caótica.

Una de las principales conclusiones ha sido mostrar que el hamiltoniano de Hénon-Heiles posee cuencas de Wada, lo que significa que cualquier condición inicial que pertenezca a la frontera de una cuenca de escape, pertenece igualmente a la frontera de las otras dos cuencas. La existencia de esta extraña propiedad supone una dificultad nueva a la hora de predecir el futuro dinámico de un sistema, aún mayor incluso que si sólo presentara cuencas fractales, de modo que se puede afirmar que la existencia de cuencas de Wada amplía el concepto clásico de sensibilidad a las condiciones iniciales. Pero además hemos encontrado que en situaciones límite, cuando el tamaño de las salidas tiende a cero, existe una total fractalización del espacio de fases, lo cual nos impide definitivamente obtener información acerca del futuro de muchos sistemas.

Todos estos resultados, que se producen en un estricto contexto clásico, nos permiten hacer una reflexión nueva acerca del papel de la incertidumbre y el determinismo en Mecánica Clásica. La presencia de estructuras fractales asociadas al espacio de fases de las condiciones iniciales com-

plica de tal manera nuestra capacidad de predicción, que hace preciso replantearse los conceptos tradicionales de indeterminismo.

#### Bibliografía

- [1] M. BORN, *Physicalische Blätter* **11**, 49 (1955).
- [2] H. A. LORENTZ, *The motion of electrons in metallic bodies, I, II, and III*, Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, *Section of Sciences* **7**, 438-453, 585-593, 684-691 (1905).
- [3] R. P. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON, AND M. SANDS, *The Feynman Lectures on Physics. Vol. I Mainly Mechanics, Radiation and Heat*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1963, página 38-9.
- [4] S. BLEHER, C. GREBOGI, AND E. OTT, *Physica D* **46**, 87-121 (1990).
- [5] G. CONTOPOULOS, H. E. KANDRUP, AND D. KAUFMAN, *Physica D* **64**, 310-323 (1993).
- [6] G. CONTOPOULOS, *Astronomy and Astrophysics* **231**, 41-55 (1990).
- [7] G. Z. K. HORVATH, J. L. HERNÁNDEZ POZOS, K. DHOLAKIA, J. RINK, D. M. SEGAL, AND R. C. THOMPSON, *Phys. Rev. A* **57**, 1944 (1998).
- [8] J. CHEN, J. L. REXFORD, AND Y. C. LEE, *Geophys. Res. Lett.* **17**, 1049-1052 (1990).
- [9] K. Veselý and J. Podolský, *Phys. Lett. A* **271**, 368-376 (2000).
- [10] S. BLEHER, C. GREBOGI, E. OTT, AND R. BROWN, *Phys. Rev. A* **38**, 930-938 (1988).
- [11] J. KENNEDY AND J. A. YORKE, *Physica D* **51**, 213-225 (1991).
- [12] H. E. NUSSE AND J. A. YORKE, *Physica D* **90**, 242-261 (1996).
- [13] H. E. NUSSE AND J. A. YORKE, *Science* **271**, 1376-1380 (1996).
- [14] K. T. ALLIGOOD, T. D. SAUER, AND J. A. YORKE, *Chaos. An Introduction to Dynamical Systems*, (Springer-Verlag, New York, 1997). Third printing 2000.
- [15] H. E. NUSSE, E. OTT, AND J. A. YORKE, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2482-2485 (1995).
- [16] H. E. NUSSE AND J. A. YORKE, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 626-629 (2000).
- [17] M. HÉNON AND C. HEILES, *Astron. J.* **69**, 73-79 (1964).
- [18] K. YONEYAMA, *Tohoku Math. J.* **43**, 11-12 (1917).
- [19] M. A. F. SANJUÁN, J. KENNEDY, C. GREBOGI, AND J. A. YORKE, *Chaos* **7**, 125-138 (1997).
- [20] M. A. F. SANJUÁN, J. KENNEDY, E. OTT, AND J. A. YORKE, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1892-1895 (1997).
- [21] J. KENNEDY, M. A. F. SANJUÁN, J. A. YORKE, AND C. GREBOGI, *Topology and its Applications* **94**, 207-242 (1999).
- [22] J. AGUIRRE AND M. A. F. SANJUÁN, *Physica D* **171**, 41-51 (2002).
- [23] L. POON, J. CAMPOS, E. OTT, AND C. GREBOGI, *Int. J. Bifurcation Chaos* **6**, 251-265 (1996).
- [24] E. C. DA SILVA, I. L. CALDAS, R. L. VIANA AND M. A. F. SANJUÁN, *Physics of Plasmas* **9**, 4917-4928 (2002).
- [25] M. A. F. SANJUÁN, T. HORITA AND K. AIHARA, *Chaos* **13**, 17-24 (2003).
- [26] D. SWEET, E. OTT, AND J. A. YORKE, *Nature* **399**, 315 (1999).
- [27] J. AGUIRRE, J.C. VALLEJO, AND M.A.F. SANJUÁN, *Phys. Rev. E* **64**, 066208 (2001).
- [28] S.W. McDONALD, C. GREBOGI, E. OTT, AND J.A. YORKE, *Physica (Amsterdam)* **17D**, 125 (1985).
- [29] A. P. S. DE MOURA AND P. S. LETELIER, *Phys. Lett. A* **256**, 362-368 (1999).
- [30] J. AGUIRRE AND M.A.F. SANJUÁN, *Phys. Rev. E* **67**, 056201 (2003).

**Jacobo Aguirre y Miguel A. F. Sanjuán**  
están en el Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos de la  
Univ. Rey Juan Carlos. Móstoles. Madrid