Dinámica No Lineal: Orígenes y Futuro

Miguel A. F. Sanjuán[1] y
José Manuel Casado Vázquez[2]

[1]*Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos Universidad Rey Juan Carlos. Madrid*
[2]*Área de Física Teórica. Universidad de Sevilla*

El científico no estudia la naturaleza porque es útil; la estudia porque encuentra placer en ella, y encuentra placer en ella porque es hermosa. Si la naturaleza no fuera hermosa, no valdría la pena conocerla, y si no valiera la pena conocerla, la vida no valdría la pena vivirla.

Henri Poincaré

1. Introducción

En el presente artículo se pretende dar una visión panorámica de los orígenes, desarrollo y perspectivas de la Dinámica No Lineal (en adelante DNL), tanto desde desde el punto de vista de su íntima relación con la tradición de la Física, como atendiendo a su carácter interdisciplinar.

En la sección siguiente se analiza precisamente este carácter interdisciplinar de la DNL y en secciones posteriores se describen con bastante detalle sus orígenes y desarrollo, enfatizando su íntima relación con el desarrollo y evolución de las teorías físicas en los últimos ciento cincuenta años. Esta perspectiva histórica es muy importante porque aporta una gran información acerca del papel relevante de la DNL en el contexto de las grandes revoluciones de la Física del siglo XX. Es por ello que en este trabajo presentamos un conjunto de fuentes bibliográficas primarias originales que permiten adquirir una visión nítida de esta realidad, que en ocasiones se encuentra obscurecida debido, tal vez, a la ausencia de cursos de DNL en los currículos de la titulación de Ciencias Físicas en algunas universidades. Esta situación está cambiando, ya que cada vez son más las universidades de todos los países que están implementando la enseñanza de la DNL en los currículos estándar y también es mayor el número de los que aciertan a situar a la DNL en el sitio que le corresponde dentro del marco de la Física. Como cabía esperar, la historia de la DNL no es un simple proceso lineal de acumulación de saberes, y esto se manifiesta en el gran número de caminos diferentes que han tenido que recorrer los investigadores de diferentes campos para llegar a construir un edificio común. En este breve artículo se ha prestado también atención a los últimos avances y se han señalado algunas perspectivas de una disciplina con un gran potencial de futuro.

2. DNL e interdisciplinariedad

Una de las características fundamentales de la DNL es su carácter interdisciplinar y universal. Los métodos y las técnicas derivadas de la DNL son de aplicación en muchas disciplinas; en realidad, desde una cierta perspectiva que hace referencia a las causas, en el mismo término “Dinámica” se puede englobar todo aquello que cambia en el tiempo. Un sistema dinámico será, por tanto, aquel que evoluciona en el tiempo. Desde el punto de vista de la tradición de la Física, la Dinámica es, tal vez, la ciencia más antigua ya que uno de los primeros fenómenos que subyugaron a los primeros “científicos” fue precisamente el estudio del movimiento de los astros y cuerpos celestes. Al comienzo de la época moderna la síntesis Newtoniana culminó un largo proceso de descubrimiento que se remontaba a la Antigüedad e intentó integrar todo ese conocimiento en lo que hoy denominamos la imagen mecanicista del mundo. La ciencia que conocemos como Mecánica Clásica engloba en nuestros días toda esta milenaria tradición. Pero los grandes éxitos de la Mecánica Clásica sólo fueron posibles tras una considerable limitación de las ambiciones iniciales de quienes participaron en su contrucción. Todos los grandes científicos del siglo XIX eran más o menos conscientes de que una gran parte de los procesos de cambio que se observan en la Naturaleza (un proceso de putrefacción, por ejemplo) quedaban fuera de la descripción de una disciplina que se había centrado únicamente en estudiar el movimiento de los cuerpos físicos, dejando sin resolver el problema más general del cambio y sus causas. Porque, realmente, existen muchos otros objetos que se “mueven”, si entendemos por movimiento la evolución en el tiempo de un sistema. Cuando se produce una reacción química, por ejemplo, la concentración de los reactivos varía y es por ello por lo que tal reacción es susceptible de ser modelada como un proceso dinámico. Por tanto, no solo en el campo de la Física, sino en multitud de problemas técnicos de la Ingeniería, en Biología o en Sociología aparecen problemas de esta naturaleza y todos ellos son susceptibles de ser formulados como correspondientes a la Teoría de Sistemas Dinámicos. Ese cambio de perspectiva en cuanto a la amplitud de problemas abarcados por el concepto de sistema dinámico, cambio que fue propiciado precisamente por el origen y desarrollo multidisciplinar de la DNL se refleja en varios hechos:

- Uno de ellos es que los conocimientos que se derivan de la DNL afectan virtualmente a todas las disciplinas, ya que sus contenidos fundamentales no se restringen a un área o conjunto de áreas en particular, sino que son susceptibles de aportar una nueva visión de hacer la ciencia. Ello significa, que los fundamentos conceptuales de la

DNL son de virtual interés en cualquier disciplina y, por otro lado, que a la hora de enseñar la DNL es necesario utilizar ejemplos de muchas áreas diferentes de la ciencia. Ello produce como efecto una visión global de la realidad en contrapartida con la tradicional visión limitada que la superespecialización ha provocado.

- En cuanto a la investigación, esta característica a la que nos referimos provoca la creación de grupos de investigación interdisciplinares, donde en muchos casos se hace necesaria la cooperación entre científicos con diversa formación. Ello comporta una transformación de la forma tradicional de hacer la ciencia. Este efecto sinérgico explicaría el hecho de que en los últimos años y gracias al influjo de la DNL se hayan generado tantos proyectos de investigación integrados por científicos de muchas áreas diferentes, cosa que hubiera sido impensable hace tan solo unos años debido tal vez al fenómeno de la especialización.

H. Poincaré

Estas consideraciones implican que las ideas asociadas a la DNL tienen el poder de romper ciertas barreras a las que habían sido sometidas ciertas disciplinas clásicas y ello encaja sin duda con la capacidad integradora y universal que el estudio de la Física ha tenido desde sus inicios. Esa vocación de universalidad ha sido reconocida internacionalmente con la concesión en 2003 del Japan Prize a Benoit Mandelbrot y James Yorke [1].

3. Aproximación histórica a la DNL

Cuando se quiere comprender la naturaleza y la trascendencia de una disciplina es de capital importancia acudir a sus fuentes históricas, con el fin de tener una visión panorámica de su orígen, desarrollo y evolución en el tiempo. En las últimas décadas ha habido una enorme explosión de actividad científica en lo que se ha venido a llamar DNL. Ese proceso ha popularizado conceptos y términos tales como caos, fractales o atractores extraños, tanto en el dominio de la Física como en otras muchas ciencias. No obstante, resulta sorprendente que tan sólo hace unas décadas muy pocos físicos hubieran oido hablar de estos temas. La DNL es sin duda una disciplina muy nueva, pero, no obstante, posee una rica tradición histórica cuyas raíces se remontan muy atrás en el tiempo. No es fácil hacer un esbozo histórico de su evolución, sobre todo debido al hecho de que su desarrollo no ha sido lineal. Más bien, varios caminos y tradiciones diferentes han convergido de un modo natural, contribuyendo a la construcción de esta ciencia de naturaleza interdisciplinar.

Desde el punto de vista de la tradición de la Física, deberíamos remontarnos a la época de Isaac Newton (1642-1727) y al nacimiento de la Mecánica Clásica. A través de la enseñanza de dicha disciplina se ha trasmitido a generaciones de físicos la noción de la teoría causal y determinista que asociamos al nombre del matemático francés Pierre Simon Laplace [2] (1749-1827), según la cual, conocidas de forma exacta las condiciones iniciales de un sistema físico dado, es posible predecir con absoluta certeza el estado del sistema en cualquier otro instante de tiempo sin más que hacer uso de las ecuaciones de Newton. Hasta época muy reciente el estricto determinismo de la descripción mecánica aparecía asociado en los libros de texto a la absoluta certeza que proporcionaba dicha descripción, obviándose, de hecho, la condición necesaria para que tal certeza pudiera alcanzarse, a saber, que fuera conocido el "estado inicial" del sistema con absoluta precisión. Para muchos sistemas esta condición no es crítica: estados iniciales cercanos producen trayectorias cercanas en todo instante de tiempo. Pero existen otros muchos sistemas dinámicos en los que aparece un comportamiento completamente diferente. Son los sistemas que presentan dependencia sensible a las condiciones iniciales. Hasta hace muy poco tiempo apenas aparecía en los textos de Mecánica Clásica la menor mención a fenómenos tales como el lanzamiento de una moneda o el de un dado, ejemplos que, al menos, podrían haber generado cierta duda y discusión acerca de la capacidad de predicción real de la teoría determinista, ya que tanto uno como otro objeto no son otra cosa que sólidos rígidos. Curiosamente, son los lanzamientos de monedas y dados los ejemplos preferidos por los autores de los libros elementales sobre Teoría de Probabilidades para introducir las nociones básicas de esa disciplina.

La idea básica que subyace en nuestra incapacidad para predecir el resultado del lanzamiento de una moneda o de un dado está ligada precisamente a la noción de la dependencia sensible a las condiciones iniciales, de modo que no resulta posible predecir su evolución a largo plazo, porque en la práctica no podemos fijar con absoluta precisión sus condiciones iniciales. Así, estados iniciales muy cercanos, indistinguibles dentro de la limitada precisión de nuestras medidas, llevan a trayectorias que se separan exponencialmente en el tiempo, lo que implica una incertidumbre sobre el desarrollo posterior del movimiento. Es precisamente este tipo de movimiento el que recibe el nombre de caótico.

Dentro de la tradición de la Física, la idea de que existe una incertidumbre irreductible nos ha sido transmitida como algo ligado a la Mecánica Cuántica y, en particular, a la interpretación probabilistica de la función de onda y al principio de incertidumbre de Heisenberg, dando siempre por sentado el carácter completamente determinista de la Mecánica Clásica. No es, por tanto, extraño el hecho de que algunos de los creadores de la Mecánica Cuántica se hayan preocupado por el papel del azar en el campo de la Mecánica Clásica. De hecho, el efecto de la dependencia sensible a las condiciones iniciales fue puesto de manifiesto por el físico alemán Max Born (1882-1970) en un artículo muy poco conocido titulado Classical Mechanics in fact deterministic? [3], escrito en 1955. El modelo que Born tenía en mente es el conocido gas bidimensional propuesto por el físico holandés H. A. Lorentz [4] (1853-1928) en 1905 como modelo para la conductividad de los metales y que se usa incluso hoy día como uno de los modelos fundamentales de la Mecánica Estadística del No Equilibrio. Se trata de un sistema dinámico en el que una partícula se mueve entre un conjunto de obstáculos fijos con los que choca. En este sistema es claro que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales llevan a estados ulteriores completamente diferentes. Born concluyó que en realidad el determinismo de la Mecánica Clásica resulta ser de una falsa apariencia, debido al hecho de que no es posible determinar con absoluta precisión las condiciones iniciales de un sistema físico dado. Similares reflexiones fueron realizadas también en la misma época por el célebre físico austriaco y Premio Nobel de Física Erwin Schrödinger (1887-1961).

Es de destacar de igual modo que estas ideas, ciertamente poco conocidas e ignoradas por muchos durante mucho tiempo, se encuentran asimismo expuestas en el famoso libro del también Premio Nobel de Física Richard Feynman [5] (1918-1988), donde el autor argumenta con su incomparable estilo que la incertidumbre no es un requisito propio de la Mecánica Cuántica asociado al famoso principio de Heisenberg, sino que se trata de una característica consubstancial a la incertidumbre en la determinación de las condiciones iniciales de muchos problemas de la Mecánica Clá-sica.

En realidad, los albores de la teoría del caos se remontan al siglo XIX. Precisamente una de las características esenciales de un movimiento caótico, la noción de dependencia sensible a las condiciones iniciales, había sido observada a finales del siglo XIX por el ingeniero francés Barré de Saint-Venant (1797-1886) y por su discípulo Joseph Boussinesq (1842-1929) en sus estudios sobre soluciones de las ecuaciones diferenciales de los fluidos en la vecindad de puntos singulares. Esta noción de dependencia sensible a las condiciones iniciales fue elaborada algo más tarde por James Clerk Maxwell (1831-1879) que había sido muy influenciado por los escritos de los antedichos científicos franceses. De hecho Maxwell en uno de sus trabajos se plantea el simple estudio del choque entre dos esferas que se mueven en direcciones opuestas con velocidades inversamente proporcionales a sus masas. En relación con ese sistema Maxwell se pregunta acerca de las probabilidades de las diferentes direcciones de las velocidades después del impacto y la conclusión sorprendente que obtiene es que todas las velocidades de rebote son equiprobables si se tiene en cuenta la dependencia con las condiciones iniciales. Estas ideas fueron continuadas por los científicos franceses Jacques Hadamard [6] (1868-1963) en 1898 y Pierre Duhem [7] (1861-1916) en 1906 y Henri Poincaré las recoge explícitamente en 1908 [8]. Ideas similares también fueron expuestas por el físico ruso N. S. Krylov [9] en su obra Sobre los Fundamentos de la Física Estadística publicado en ruso en 1950. En la década de 1970, el matemático ruso Jacob Sinai analizó un sistema relacionado con el gas de Lorentz: el movimiento de un punto en un sistema plano con obstáculos convexos (billar de Sinai) y probó de forma rigurosa que una pequeña desviación en el estado inicial conduce a grandes cambios en la evolución posterior [10].

A. Lyapunov

4. La física y la teoría del caos

Sin duda, uno de los hitos más importantes de la historia de la Física del siglo XX es el encuentro que se produce entre la Física y el Caos. Si bien su alcance abarca muchas disciplinas, nos centraremos en particular en la influencia que la Teoría del Caos ha ejercido sobre la propia Física. Para ello nos centraremos en tres problemas que constituyeron grandes retos de la Física de los siglos XIX y XX: el problema de los tres cuerpos en Mecánica Celeste, el orígen de la irreversibilidad y el problema de la turbulencia en el movimiento de los fluidos.

4.1. La Mecánica Celeste y el problema de los tres cuerpos

Uno de los personajes clave en la historia de la Teoría del Caos es, sin duda, el matemático francés Henri Poincaré (1854-1912), quien a los 26 años escribió una memoria sobre el problema de los tres cuerpos [11] que resultó ganadora de la competición internacional para conmemorar el 60 aniversario de Oscar II, rey de Suecia y Noruega. El problema de los tres cuerpos se puede enunciar de un modo muy sencillo: sean tres partículas de masas diferentes que se mueven en el espacio bajo la acción de la gravitación mutua; dadas unas condiciones iniciales, determínese el movimiento de cada una de las partículas. Aunque el problema tiene un enunciado de gran simplicidad, su solución no es sencilla en absoluto: Poincaré demostró que no era posible encontrar una solución exacta tal y como la conocemos para el problema de los dos cuerpos. Posteriormente, en 1892, escribió su monumental obra Los Nuevos Métodos de la Mecánica Celeste [12], que representa una fuente enorme de conocimientos acerca de este problema. De hecho, el objeto del concurso organizado por el rey Oscar II era responder a la pregunta de si el sistema solar es estable, es decir, si los planetas seguirán en sus órbitas o algunos de ellos, afectados por la proximidad de otros, lograrían escapar de sus órbitas para siempre. Como buen científico, Poincaré no abordó el problema de los tres cuerpos de modo general, sino que se centró en estudiar lo que se acostumbra a llamar el "problema restringido de los tres cuerpos", que es un caso particular en el cual se considera que una de las masas es muy pequeña con respecto a las demás. En este estudio encontró lo que él llamó órbitas doblemente asintóticas u homoclínicas, que se caracterizan por poseer en el espacio de las fases un punto homoclínico2. La presencia de uno de estos puntos presenta implicaciones muy serias en la dinámica del sistema. Tras abordar el estudio del problema Poincaré llegó a escribir: Uno queda impactado por la complejidad de esta imagen que ni siquiera me atrevo a dibujar. Nada puede darnos una idea mejor de la complejidad del problema de los tres cuerpos, y en general de todos los problemas de la dinámica.... Y es que a la hora de intentar resolver este problema creó un método o una aproximación geométrica mediante la cual entrevió que este problema tenía una dinámica muy compleja que es básicamente lo que ahora llamamos caos determinista. La influencia de Poincaré en el desarrollo de los sistemas hamiltonianos es enorme y en este sentido es interesante mencionar que su testigo lo tomó el matemático americano George David Birkhoff [13] (1884-1944), quien a su vez fue profesor en la Universidad de Harvard de Edward Lorenz quien redescubriría la dependencia sensible a las condiciones iniciales. Dentro de esta linea de pensamiento y en el contexto americano no podemos olvidar la figura de Steven Smale [14], merecedor de la medalla Fields en 1966 por sus grandes contribuciones a la teoría de sistemas dinámicos. A él se debe precisamente el concepto de herradura de Smale, que fue un paso importante en la comprensión de la relación entre la existencia de un punto homoclínico y la noción de caos determinista, a través de la idea sencilla de la dinámica simbólica usando la aplicación del desplazamiento de Bernoulli.

La tradición rusa se remonta a Alexander M. Lyapunov [15] (1857-1918), que había sido estudiante de doctorado de Pafnuti L. Chebychev (1821-1894), y cuya tesis sobre la estabilidad del movimiento ha ejercido una influencia enorme en la Física. De Lyapunov hemos heredado conceptos como el de estabilidad de los sistemas dinámicos y también los útiles exponentes de Lyapunov, que nos sirven para caracterizar cuando un sistema dinámico dado es o no caótico. Una de las principales escuelas dentro de la tradición rusa es la de Leonid I. Mandelstam (1879-1944), continuada por sus discipulos Alexander A. Andronov [16] (1901-1952) y Lev S. Pontryagin (1908-1988). Otra escuela clave dentro de esta misma tradición es la de Andrei N. Kolmogorov (1903-1987). Todos ellos desarrollaron métodos nuevos e hicieron contribuciones notables a la construcción de la DNL tal y como la conocemos hoy en día. En el año 1954, en el Congreso Internacional de Matemáticas que tuvo lugar en Amsterdam, Kolmogorov [17], enunció un teorema para sistemas hamiltonianos que fue demostrado posteriormente por su estudiante Vladimir I. Arnold [18] y por el alemán Jürgen Moser [19] (1928-1999). A dicho teorema se le conoce actualmente como teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) y tiene que ver con el problema de la estabilidad de los toros invariantes en los sistemas integrables de la mecánica hamiltoniana bajo la acción de pequeñas perturbaciones. Este trabajo, de hecho, enlaza de manera natural con los trabajos pioneros de Poincaré sobre Mecánica Celeste, ya que éste había puesto de manifiesto la idea de la complejidad de las órbitas en el problema de los tres cuerpos, y el teorema KAM se puede considerar como una culminación de estas ideas. Como ya vimos, la estabilidad del sistema solar es un problema de especial importancia en la Mecánica Celeste y el teorema KAM muestra que bajo ciertas condiciones esas órbitas se mantienen confinadas en ciertos toros. Extensas exploraciones numéricas ponen en evidencia que esto es realmente así. Más recientemente, en 1988, los físicos G. J. Sussman y J. Wisdom [20] del MIT han mostrado que la órbita de Pluton es caótica.

4.2. Complejidad del movimiento de los fluidos

El fenónemo de la turbulencia en el movimiento de fluidos es uno de los casos más dramáticos de comportamiento caótico. Las ecuaciones fundamentales del movimiento de un fluido, las ecuaciones de Navier-Stokes, son conocidas desde finales del siglo XIX, pero conviene recordar que no se conoce la forma de sus soluciones en régimen turbulento. En 1963 el meteorólogo del MIT Edward Lorenz desarrolló un modelo de tres ecuaciones diferenciales ordinarias para describir el movimiento de un fluido bajo la acción de un gradiente térmico y a la hora de encontrar soluciones numéricas con ayuda de un ordenador se encontró de nuevo con el fenómeno de la dependencia sensible a las condiciones iniciales. Es decir, el sistema era inherentemente impredecible, de tal modo que pequeñas variaciones en la fijación de las condiciones iniciales llevaban a soluciones drásticamente diferentes. En ese momento muy pocos dieron importancia a este hecho, tal vez porque los resultados del trabajo de Lorenz se publicaron con un título algo críptico [21] en una revista de Meteorología y pasaron inadvertidos para muchos científicos. Entre los que se dieron cuenta de la importancia del trabajo de Lorenz, conviene destacar al americano Steven Smale, quien hizo notables contribuciones a la comprensión y desarrollo de la teoría de los sistemas dinámicos. Otra de las personas que inmediatamente reconoció las implicaciones de tal descubrimiento fue el también americano James A. Yorke, de la Universidad de Maryland, quien comprendió las repercusiones filosóficas de este hallazgo y dió a conocer a la comunidad científica el trabajo de Lorenz. Posteriormente, en el año 1975, Yorke acuñó el término caos al escribir el famoso artículo Period Three Implies Chaos [22]. Unos años antes, en 1963, el matemático ucraniano A. N. Sharkovskii había demostrado un teorema (conocido ahora como teorema de Sharkovskii [23]), que fue publicado en ruso en la revista Ukrainian Mathematics Journal, y donde el resultado de Li y Yorke aparecía como un corolario.

Unos diez años más tarde de la publicación del trabajo de Lorenz se produjo un paso importante con el descubrimiento de los matemáticos del Laboratorio Nacional de los Alamos N. Metropolis, M.L. Stein and P.R. Stein [24] de las propiedades universales de ciertos sistemas dinámicos discretos, también llamados, aplicaciones no lineales. Los modelos de aplicaciones no lineales unidimensionales son los ejemplos más sencillos que permiten mostrar una transición de un movimiento regular o periódico a un movimiento complejo, irregular o caótico. También este trabajo fue desconocido hasta que en 1976 apareció en la revista Nature un artículo del físico convertido en zoólogo Robert May [25] sobre la duplicación de período de la aplicación logística. Como suele ser habitual, más tarde se supo que el primero en hablar de este fenómeno había sido el matemático sueco P. J. Myrberg [26] en 1962. De hecho la aplicación logística había sido introducida en 1854 como un modelo de crecimiento en el contexto de la dinámica de las poblaciones por el matemático belga Pierre François Verhulst [27] (1804-1849). Además dicha aplicación también había sido profusamente estudiada en otros contextos por el francés

E. Lorentz

Gaston Julia (1893-1978), por el húngaro-americano John von Neumann (1903-1957), el polaco-americano Stanislaw Ulam (1909-1984) y por el americano Norbert Wiener (1894-1964). En la misma época en que apareció el trabajo de May, el físico americano Mitchell Feigenbaum [28] descubrió la existencia de exponentes críticos universales que caracterizaban la transición del movimiento periódico al caótico en aplicaciones unidimensionales con la propiedad de duplicación de periodo. Simultáneamente, se produjo el mismo descubrimiento por parte de los franceses Pierre Coullet y Charles Tresser [29], que en ese momento eran estudiantes de doctorado en la Universidad de Niza, y por los físicos alemanes de la Universidad de Marburg Siegfried Grossmann y Stefan Thomae [30]. El concepto de grupo de renormalización había sido aplicado anteriormemte en el campo de la Mecánica Estadística para estudiar los llamados fenómenos críticos y las transiciones de fase y su desarrollo en estos campos había hecho merecedor del Premio Nobel de Física al americano Kenneth Wilson en 1982. Dichos métodos fueron aplicados por Feigenbaum y otros para desarrollar la teoría matemática de las bifurcaciones de duplicación de período. Hasta comienzo de los años ochenta la mayor parte de los trabajos eran de naturaleza teórica o fruto de exploraciones numéricas con ordenadores. En cualquier caso siempre siempre se pensó en las consecuencias importantes que esos descubrimientos teóricos tenían para la Física, así como la posible importancia para la comprensión de la transición a la turbulencia de los fluidos. Uno de los primeros experimentos donde se mostró el fenómeno de duplicación de período lo llevó a cabo el físico francés de la Ecole Normale Supérieure de Paris, Albert Libchaber [31] al estudiar celdas convectivas de Rayleigh-Bénard a finales de los setenta. Un experimento sencillo e importante con un simple grifo goteante fue realizado por el físico americano Robert Shaw [32] de la Universidad de California en Santa Cruz. Otro hito experimental fue debido a los físicos americanos Jerry Gollub y Harry Swinney [33], que también encontraron el fenómeno de duplicación de periodo al reproducir el experimento clásico de Taylor-Couette.

La teoría del físico ruso Lev D. Landau [34], y del alemán Eberhard Hopf [35] que proponía la existencia de un conjunto infinito de frecuencias inconmensurables para explicar la turbulencia, fue superada en la década de los setenta por las aportaciones teóricas de David Ruelle y Floris Takens [36], quienes introdujeron en 1971 el concepto fundamental de atractor extraño. Se trata de un objeto geométrico de carácter atractor, diferente a los anteriormente conocidos casos de puntos fijos periódicos, cuasiperiódicos o ciclos límite, de ahí el nombre de "extraño", y que además posee una dimensión no entera o fraccionaria (fractal). Por otro lado, el desarrollo de la geometría fractal iniciado por Benoit Mandelbrot [37, 38], que había sido estudiante del matemático francés Gaston Julia, ha jugado un papel fundamental en la comprensión y análisis del comportamiento complejo de los sistemas dinámicos no lineales. En cualquier caso conviene no olvidar el papel jugado en muchos aspectos del desarrollo de la DNL por el matemático alemán Georg Cantor (1845-1918), en particular en lo que se refiere al conjunto de Cantor y su constante aparición en multitud de problemas dinámicos.

J. Yorke

4.3. El origen de la irreversibilidad y la teoría ergódica

Cuando se trata de sistemas con muchos grados de libertad, tales como gases de partículas o fluidos, la Mecánica Clásica necesita métodos estadísticos, debido a que entonces estamos interesados en las propiedades promedio de estos sistemas, que son aquellas a las que se asigna un correlato macroscópico. El problema de la irreversibilidad fue una de las grandes preocupaciones de uno de los "padres fundadores" de la Mecánica Estadística, el físico vienés Ludwig Boltzmann (1844-1906). La objección planteada por Josef Loschmidt (1821-1895) al programa de Boltz-mann, consistente en derivar las leyes de la Termodinámica directamente del comportamiento mecánico, puso de manifiesto lo paradójico de una situación en la que, mientras las leyes de la Mecánica son reversibles bajo inversión temporal, el comportamiento termodiámico de los sistemas es fundamentalmente irreversible. Sin duda ha habido grandes avances en este siglo en el intento de clarificar el orígen dinámico de las ecuaciones cinéticas, aunque el problema, en alguna medida, permanece abierto. Siguiendo a Boltzmann, los primeros intentos de fundamentar la Mecánica Estadística Clásica se basaban en la supuesta validez de la hipótesis ergódica, lo que tras la realización de esfuerzos teóricos notables condujo a un verdadero callejón sin salida. Nuevos intentos de fundamentación han surgido tras la caracterización de formas más complejas de comportamiento dinámico como el de los "sistemas mezclados" (mixing), un concepto que fue definido inicialmente por G. W. Gibbs [39] y que posteriormente fue tomado por Poincaré [40] y por E. Borel [41]. La formulación matemática precisa de lo que se denomina Teoría Ergódica se debe al alemán Eberhard Hopf [42].

Desde un punto de vista menos fundamental y más práctico, el comportamiento aleatorio o errático de ciertos sistemas dinámicos como el movimiento browniano, se ha modelado frecuentemente mediante ecuaciones diferenciales estocásticas, obtenidas introduciendo términos aleatorios en las ecuaciones de Newton para la dinámica de ciertos grados de libertad del sistema. Surge así la llamada dinámica estocástica iniciada por Paul Langevin [43] (1872-1946). Sin embargo, el descubrimiento del caos determinista marca un cambio notable en la concepción del origen del comportamiento aleatorio en los sistemas físicos. El hecho de que ecuaciones de evolución para sistemas no lineales generen comportamientos complejos con aleatoriedad intrínseca ha abierto muchas posibilidades a la hora de entender los fundamentos de la Mecánica Estadística del No Equilibrio. Desde hace tan sólo unos pocos años estas ideas de la teoría del caos han sido aplicadas con cierto éxito a teorías de transporte, donde se han encontrado relaciones significativas entre las propiedades macroscópicas de sistemas extensos y las propiedades de la dinámica microscópica subyacente. Cabe destacar en esta línea de investigación la teoría elaborada muy recientemente por el físico belga Pierre Gaspard, de la Universidad Libre de Bruselas y por el físico americano Robert Dorfman de la Universidad de Maryland en College Park. Es de destacar un artículo aparecido en Nature en 1998, en el que se prueba experimentalmente la existencia de lo que se denomina "caos microscópico de átomos y moléculas" en fluidos, y al que se hace responsable de las propiedades de éstos [44]. En particular observando el movimiento browniano de una partícula coloidal suspendida en agua dichos autores prueban por primera vez que su dinámica microscópica es sensible a las condiciones iniciales, es decir, es caótica, lo que justificaría el papel de la inestabilidad dinámica en las propiedades de los fluidos fuera del equilibrio. Este hecho pareció abrir nuevas perspectivas a la hora de fundamentar la Mecánica Estadística del No Equilibrio en base a la Teoría del Caos pero las extraordinarias dificultades conceptuales que tal empresa conlleva siguen todavía en pie.

5. Los osciladores no lineales

Otra vía que ha contribuido a la construcción de la DNL es el estudio de los osciladores no lineales. Uno de los pioneros en esta vía fue el físico inglés John William Strutt Lord Rayleigh (1842-1919), quien se introdujo en este campo a través de su interés en comprender la física de los instrumentos musicales. Para este tipo de sistemas, una primera aproximación basada en el uso de osciladores lineales no es efectiva porque los instrumentos reales no producen un tono simple, como le ocurre a un oscilador lineal, de modo que es preciso añadir fricción por un lado y términos no lineales de recuperación por otro. Es decir, es necesario usar una fuerza elástica diferente de la que proporciona la ley de Hooke: ut tensio sic vis [45].

Mediante un inteligente uso de los elementos dinámicos básicos del problema, Lord Rayleigh creó modelos que explicaban el sonido emitido por los instrumentos musicales. En su famoso libro The Theory of Sound [46] publicado en 1877, Rayleigh introdujo una serie de métodos bastante generales como la noción de ciclo límite, que es un movimiento periódico que tiene el sistema físico con independencia de las condiciones iniciales. Posteriormente fueron importantes los desarrollos del ingeniero eléctrico holandés Balthasar van der Pol [47] (1889-1959), quien en 1927 encontró un ciclo límite extremadamente importante en el modelo matemático de un oscilador no lineal de una válvula electrónica de vacío, de las usadas para construir radios antes de la invención del transistor. El ingeniero alemán G. Duffing [48] es conocido fundamentalmente por su modelo de oscilador no lineal simétrico con una no linealidad cúbica: el oscilador de Duffing. Este modelo es el paradigma para el estudio de muchos fenómenos en DNL. También habría que citar al ingeniero francés A. Liénard [49], quien en 1928 encontró soluciones periódicas en un tipo muy general de osciladores no lineales, en el que se engloba el oscilador de van der Pol. La teoría fue posteriormente desarrollada a finales de los años cuarenta, justo después de la II Guerra Mundial, por dos matemáticos ingleses de la Universidad de Cambridge: Mary Lucy Cartwright (1900-1998) and John Edensor Littlewood (1885-1977) [50] que demostraron que muchos de los experimentos de los físicos experimentales y muchas de las conjeturas de los físicos teóricos se obtenían directamente del análisis de las ecuaciones diferenciales del movimiento. De hecho, estos matemáticos habían seguido las ideas del americano George Birkhoff, y a su vez sus resultados condujeron al trabajo del americano Norman Levinson (1912-1975), quien a su vez suministró la base para la construcción de la herradura de Smale.

En Rusia el trabajo sobre osciladores no lineales fue iniciada por Leonid I. Mandelstam (1879-1944), quien se había formado con el físico alemán A. Kundt (1839-1894) en Estrasburgo y fue el iniciador de una escuela de pensamiento no lineal en Rusia. Esta línea de trabajo fue proseguida por Alexander A. Andronov (1901-1952) y por L.S. Pontryagin (1908-1988), quienes introdujeron la noción de estabilidad estructural de un sistema de ecuaciones, concepto muy asociado al de bifurcaciones de sistemas dinámicos. Asimismo el concepto de bifurcación de ciclos límite que había sugerído Poincaré en 1892, fue probado por Andronov en 1930 y por Hopf en 1940 y recibe el nombre de bifurcación de Andronov-Hopf, aunque es más conocido simplemente como bifurcación de Hopf. Esta escuela continuó posteriormente en los años 50 y 60 en Gorki, actual Nizhnii Novgorod, obteniéndose resultados paralelos al desarrollo de la teoría en Occidente. Ahí se desarrollaron muchos métodos de la Física No Lineal bajo el paradigma de las osciladores no lineales y de las autooscilaciones. Es justamente de ahí de donde surge la concepción de los llamados “sistemas groseros”, que posteriormente calificaría Smale como “sistemas estructuralmente estables”. Una de las características fundamentales de esta escuela es el interés tanto por problemas teóricos, como por las aplicaciones prácticas tanto en Física como en Tecnología. La presión ejercida por las necesidades de la Radiotécnia hizo que los matemáticos de esta escuela se interesaran por el problema de las fluctuaciones, originándose de esta manera una escuela de Radiofísica Estadística que se destacó en el estudio de los efectos del ruido en los sistemas dinámicos no lineales, campo donde destacó entre otros Ruslan L. Stratonovich [51, 52] (1930-1997).

En Japón, la teoría de osciladores no lineales y sus aplicaciones a la Radiofísica se desarrollaron en la escuela de Chihiro Hayashi en la Universidad de Kyoto. Hayashi hizo notables contribuciones al estudio de los osciladores no lineales y sus aplicaciones prácticas en Ingeniería Eléctrica, publicando en 1964 su famoso libro Nonlinear Oscillations in Physical Systems [53]. En 1961 se produce un hecho destacable por parte del ingeniero japonés Yoshisuke Ueda [54, 55], a la sazón estudiante de doctorado con Chihiro Hayashi. Ueda estudiaba la dinámica de varios osciladores no lineales tales como el oscilador de van der Pol y el oscilador de Duffing, y es precisamente en un modelo particular de este último donde aparentemente encontró por primera vez soluciones de las que ahora mismo designamos por soluciones caóticas. Esta tradición sigue muy viva en Japón, donde existen estudios muy florecientes actualmente en DNL.

6. Algunos avances recientes en DNL

El nivel de actividad científica de la DNL sigue en continuo crecimiento. Resultados nuevos siguen apareciendo en las revistas científicas especializadas y nuevos retos configuran la organización de conferencias donde se discuten las nuevas ideas y conceptos. En la última década se han producido avances importantes a lo largo de varias líneas. Comenzaremos por citar el problema del Control del Caos, idea de la que han sido pioneros en los años de la década de 1990 los físicos de la Universidad de Maryland Edward Ott, Celso Grebogi y James Yorke, con su conocido artículo Controlling Chaos [56], que es uno de los más citados de toda la literatura en DNL. Simultaneamente surgió la idea de "sincronización del caos" [57] por parte de los físicos americanos del Naval Research Laboratory de Washington DC (junto a la Universidad de Maryland) Lou Pecora y Tom Carroll. Un desarrollo de esta teoría fue llevada a cabo por los físicos de la Universidad de Potsdam Arkady Pikovsky, Michael Rosemblum y Juergen Kurths con la idea de "sincronización de fase" [58], cuyas repercusiones prácticas están resultando ser de gran importancia. Otra línea de investigación importante es la relacionada con las aplicaciones de la DNL en las Neurociencias. En este sentido cabe citar los trabajos del científico de la Universidad de Tokyo Kazuyuki Aihara, pionero en los estudios de redes neuronales caóticas [59].

Definitivamente la Física se ha encontrado con el caos en el siglo XX. La Teoría del Caos apenas ha comenzado y de momento somos testigos de su nacimiento y de su impulso creativo. Muchos científicos se han esforzado en afrontar ciertos problemas muy complejos que las teorías clásicas no podían atacar. Todo ello hace suponer que la Teoría del Caos constituya un verdadero reto y una de las teorías físicas más prometedoras para el siglo XXI.

Referencias

[1] MIGUEL A. F. SANJUÁN. "Conceptos Universales en Física No Lineal: Caos y Fractales. Japan Prize 2003", *Rev. Esp. Fis.* **17**, 5 (2003).

[2] P.S. LAPLACE, Essai Philosophique sur les Probabilités, Paris, (1814). Ensayo Filosófico sobre las Probabilidades. Alianza Editorial, Madrid (1998).

[3] M. BORN, "Is Classical Mechanics in Fact Deterministic?", *Physicalische Blätter* **11**, 49 (1955).

[4] H. A. LORENTZ, "The Motion of Electrons in Metallic Bodies, I, II, and III", *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Section of Sciences* **7**, 438-453, 585-593,684-691 (1905).

[5] R. P. FEYNMAN, R. B. LEIGHTON, AND M. SANDS, *The Feynman Lectures on Physics. Vol. I Mainly Mechanics, Radiation and Heat*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, pp. 38-39 (1963).

[6] J. HADAMARD, "Les Surfaces à Courbures Opposées et leurs Lignes Géodésiques", J*ournal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **IV**, 27-73 (1898).

[7] P. DUHEM, La Théorie Physique, son Objet, sa Structure, Paris, (1906).

[8] H. POINCARÉ, *Science et Méthode*, Flammarion, Paris (1908).

[9] N. S. Krylov, *Works on the Foundations of Statistical Physics*, Princeton University Press, Princeton Series in Physics (1979). Original en ruso. Ediciones de la Academia de Ciencias de la URSS, (1950).

[10] J. SINAI, On the Concept of Entropy of a Dynamical System, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **124**, 768-776 (1959) (En ruso).

[11] H. POINCARÉ, "Sur les Équations de la Dynamique et le Problème des Trois Corps", *Acta Mathe*. **13**, 1-270, (1890).

[12] H. POINCARÉ, Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste, Vols. 1-3, Gauthiers-Villars, Paris, (1892-1899).

[13] G. D. BIRKHOFF, Dynamical Systems, American Mathematical Society, Providence, (1927).

[14] S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc*. **73**, 747 (1967).

[15] A. M. LYAPUNOV, Probléme générale de la stabilité du mouvement, Kharkov, (1892) (en francés), Princeton University Press, Princeton, (1947) (en inglés).

[16] A. A. ANDRONOV, Obras Completas, Ediciones de la Academia de Ciencias de la URSS, Moscú (1956) (en ruso).

[17] A. N. KOLMOGOROV, "On the Conservation of Conditionally Periodic Motions under Small Perturbations of the Hamiltonian", *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **98**, 527 (1954) (en ruso); "General Theory of Dynamical Systems and Classical Mechanics", *Proc. of the 1954 International Congress of Mathematics*, pp. 315-333, (1957) (en ruso). Traducción al inglés en el libro de R. H. Abraham y J. E. Marsden, "Foundations of Mechanics", Apéndice D, Benjamin (1988).

[18] V. I. ARNOLD, "Small denominators, II: Proof of a Theorem by A. N. Kolmogorov on the Preservation of Conditional Periodic Motion under a Small Perturbation of the Hamiltonian", *Russ. Math. Surv.* **18**, 9 (1963).

[19] J. MOSER, "On Invariants Curves of Area-preserving Mapping on an Annulus", *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys.* **2**, 1 (1962).}

[20] G. J. SUSSMAN, AND J. WISDOM, Numerical Evidence that the Motion of Pluto is Chaotic, *Science* **241**, 433 (1988).

[21] E. N. Lorenz, "Deterministic Nonperiodic Flow", *J. Atmospheric Sci.* **20**, 130 (1963).

[22] T. Y. LI AND J. A. YORKE, "Period Three Implies Chaos", *Amer. Math. Monthly* **82**, 985 (1975).

[23] A. N. SHARKOVSKII, "Coexistence of Cycles of a Continuous Map of a Line into Itself", *Ukrain. Mat. Journal* **16**, 61 (1963).

[24] N. METROPOLIS, M.L. STEIN AND P.R. STEIN, "On Finite Sets for Transformations on the Unit Interval", *J. Comb. Theor.* **A15**, 25 (1973).

[25] R. M. MAY, "Simple Mathematical Models with Complicated Dynamics", *Nature* **261**, 459 (1976).

[26] P. J. MYRBERG, "Sur l'itération des Polynômes Réels Quadratiques", *J. Math. Pures Appl.* **41**, 339 (1962).

[27] P. F. VERHULST, "Mathematical Researches into the Law of Population Growth Increase", Nouveaux Memoires de l'Academie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, **18**, Art. 1, pp.1-45 (1845).

[28] M. FEIGENBAUM, "Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations", *J. Stat. Phys.* **19**, 25 (1978); "The

Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations", *J. Stat. Phys.* **21**, 669 (1979).

[29] P. Coullet and C. Tresser, "Itérations d'endomorphismes et Groupe de Renormalisation", *J. Phys.C* **5**, 25 (1978); C. Tresser and P. Coullet, "Itérations d'endomorphismes et Groupe de Renormalisa-tion", *C. R. Acad. Sc. Paris* **287A**, 577 (1978).

[30] S. Grossmann and S.Thomae, "Invariant Distributions and Statio-nary Correlation Functions of One-Dimensional Discrete Processes", *Z. Naturforsch.* **32a**, 1353 (1977).

[31] A. Libchaber and J. Maurer, "A Rayleigh-Benard Experiment: Helium in a Small Box", in "Nonlinear Phenomena at Phase Transitions and Instabilities", Ed. T. Riste, Plenum Press, New York (1982).

[32] Robert Shaw, The Dripping Faucet as a Model Chaotic System, Ariel Press, Santa Cruz, Calif. (1984).

[33] J.P. Gollub and H.L. Swinney, "Onset of Turbulence in a Rotating fluid", *Phys. Rev. Lett.* **35**, 927 (1975).

[34] L. D. Landau, "On the Problem of Turbulence", *Dokl. Acad. Sci. USSR* **44**, 311 (1944).

[35] E. Hopf, "A Mathematical Example Displaying Features of Turbu-lence", *Comm. Pure Appl. Math.* **1**, 303 (1948).

[36] D. Ruelle and F. Takens, *On the Nature of Turbulence*, *Commun. Math. Phys.* **20**, 167 (1971).

[37] B. Mandelbrot, Fractals: Form, Chance and Dimensions, Freeman, San Francisco (1977).

[38] B. Mandelbrot, Fractals and Chaos. Springer, New York (2004).

[39] G. W. Gibbs, Elementary Principles in Statistical Mechanics Developed with Special Reference to the Rational Foundation of Thermodynamics (1902).

[40] H. Poincaré, Leçons sur la Thermodynamique, Gauthier-Villars, Paris (1908).

[41] E. Borel, Mécanique Statistique Classique (1925).

[42] E. Hopf, Ergodentheorie, Springer, Berlin (1937).

[43] P. Langevin, Oeuvres Scientifiques de P. Langevin, CNRS, Paris (1950).

[44] P. Gaspard, M. E. Brigss, M.K. Francis, J.V. Sengers, R.W. Gam-mon and J.R. Dorfman, "Experimental Evidence for Microscopic Chaos", *Nature* **394**, 865 (1998).

[45] R. Hooke, De potentia restitutiva (1678).

[46] J.W.Strutt, Lord Rayleigh, The Theory of Sound (1877).

[47] B. van der Pol, "On Relaxation Oscillations", *Philos. Mag.* **7**, 901, 946 (1926); B. van der Pol and J. van der Mark, "Frequency Demultiplication", *Nature* **120**, 363 (1927).

[48] G. Duffing, "Erzwungene Schwingungen bei Veränderlicher Eigenfrequenz und ihre Technische Bedeutung". Vieweg (1918).}

[49] A. Liénard, "Etude des Oscillations Entrenues", *Rev. Génerale de l'Electricité* **23**, 946 (1928).

[50] M. L. Cartwright and J. E. Littlewood, "On nonlinear Differential Equations of the Second Order", *J. London Math. Soc.*, **20** 180 (1945).

[51] R. L. Stratonovich, Topics in the Theory of Random Noise, Vol.1, Gordon and Breach, New York (1963); Topics in the Theory of Random Noise, Vol. 2, Gordon and Breach, New York (1967).

[52] R. L. Stratonovich, Nonlinear Nonequilibrium Thermodynamics I. Linear and Nonlinear Fluctuation-Dissipation Theorems, Springer, (1992) y Nonlinear Nonequilibrium Thermodynamics II. Advanced Theory, Springer, Berlin (1994).

[53] C. Hayashi, Nonlinear Oscillations in Physical Systems, McGraw-Hill (1964).

[54] Y. Ueda, "Some Problems in the Theory of Nonlinear Oscillations", Ph. D. Thesis, Kyoto University, (1965). Reprinted in: Y. Ueda, The Road to Chaos, Eds. R.H.Abraham and H.B. Stewart, pp.1-71, *Ariel Press*, Santa Cruz, Calif. (1992).

[55] Y. Ueda, "Strange Attractors and the Origin of Chaos", en The Chaos Avant-Garde. Memories of the Early Days of Chaos Theory, Eds. R. Abraham and Y. Ueda, *World Scientific*, pp.23-55, (2000).

[56] E. Ott, C. Grebogi and J. A. Yorke, "Controlling Chaos", *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1196 (1990).

[57] L. M. Pecora and T. L. Carroll, "Synchronization in Chaotic Systems", *Phys. Rev. Lett.* **64**, 821 (1990).

[58] M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky and J. Kurths, "Phase Synchroni-zation of Chaotic Oscillators", *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1804 (1996); Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press, Cambridge (2001).

[59] K. Aihara, T. Takabe and M. Toyoda, Chaotic Neural Net-works, *Physics Letters A*, **144**, 333-340 (1990).