

Résonances dans un système chaotique

S. Zambrano¹ et J. M. Casado² et M.A.F Sanjuán¹

¹*Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos*

*Departamento de Matemáticas y Física Aplicadas y Ciencias de la Naturaleza,
Universidad Rey Juan Carlos, Tulipán s/n, 28933 Móstoles, Madrid, Espagne*

²*Area de Física Teórica*

Universidad de Sevilla, Apartado de Correos 1065, 41080 Sevilla, Espagne

szambrano@escet.urjc.es

Résumé

La résonance dans les systèmes dynamiques est un phénomène d'une grande importance. Une grande attention a été portée à la résonance que des perturbations aléatoires peuvent induire, c'est ce qu'on appelle la résonance stochastique. Elle apparaît dans de nombreux systèmes physiques et biologiques. Des comportements résonants assez similaires à ceux induits par le bruit peuvent être observés quand la perturbation est d'origine chaotique. Cela implique que des systèmes physiques où l'on considère que le bruit a une contribution essentielle pourraient être purement déterministes. Par conséquent, il est intéressant d'approfondir le rôle que des perturbations déterministes ou aléatoires peuvent jouer dans la dynamique globale résonante d'un système. À cette intention une étude de l'effet que des perturbations chaotiques et des perturbations stochastiques induisent dans un système dynamique a été réalisée.

1 Introduction

Les comportements résonants ont été traités en physique et ont eu une très grande importance pour la compréhension de nombreux phénomènes présents dans la nature.

Le phénomène de la résonance stochastique (SR) a été largement étudié durant les dernières années et on peut l'observer dans beaucoup de systèmes [1]. Le système paradigmatique où l'on peut trouver une résonance stochastique est celui d'une particule qui se trouve soumise à une force conservatrice provenant d'un potentiel avec deux minimums; à une force harmonique (qui ne peut pas induire de sauts parmi ces deux minimums) et à une perturbation aléatoire, comme le bruit blanc gaussien. Pour une valeur finie de l'intensité du bruit la synchronisation des sauts avec la force harmonique est maximale, celle-ci mise en évidence par un maximum dans la SNR (rapport signal sur bruit) du système. Les comportements du type SR ont été observés dans les systèmes chaotiques où l'attracteur est décomposé en deux parties jouant un rôle analogue à celui des minimums du potentiel [3, 4].

Beaucoup d'autres phénomènes ont été analysés et suivent un comportement identique à celui de la SR, même si la perturbation responsable de ce comportement est d'origine purement déterministe. Par exemple des phénomènes du type SR se rencontrent dans des systèmes où l'on utilise un signal chaotique provenant de l'application logistique au lieu du bruit blanc gaussien, obtenant ce qu'on appelle la *résonance chaotique* [5, 6]. Elle est également observée quand la perturbation est harmonique et d'une très haute fréquence, appelée la *résonance vibrationnelle*.

Ceci pose la question de l'importance de l'origine déterministe ou aléatoire de la perturbation dans le comportement résonant d'un système dynamique. Plus précisément,

la question clé à laquelle on veut répondre est si un comportement du type SR équivalent (caractérisé par la SNR) à celui induit par le bruit peut être provoqué par une perturbation purement déterministe. Cela impliquerait que derrière la dynamique de systèmes où l'on suppose que le bruit a une importance cruciale, comme dans certains systèmes biologiques, c'est plutôt le chaos qui joue ce rôle clé dans la résonance. Ce point est important car on sait bien comment contrôler des systèmes déterministes, même s'ils sont chaotiques.

2 Description du modèle

Le système étudié est un modèle simple où la SR classique a déjà été observée [2]. L'expression générale du système est

$$x_{n+1} = (a - 1)x_n - ax_n^3 + \epsilon \sin(2\pi f_0 n) + d(\xi_n) = F(x_n, \xi_n, n). \quad (1)$$

On considère la situation à $\epsilon = 0$, $\xi = 0$ quand la dynamique est chaotique et quand il y a deux attracteurs chaotiques symétriques par rapport à $x = 0$. Cette situation apparaît pour des valeurs de $a < a^* \approx 3.58$, où a^* est la valeur pour laquelle une crise se produit et les deux attracteurs se fondent en un seul. On prendra donc $a = 3.4$. Le terme ϵ ne doit pas dépasser une certaine limite afin de ne pas induire des sauts entre les deux attracteurs, notre choix est $\epsilon = 0.05$ avec $f_0 = 0.125$. C'est donc la mise en jeu de la perturbation extérieure ξ_n qui permet ces sauts. La fonction $d(x)$ ne fait que rééchelonner la perturbation afin d'avoir l'intensité désirée et la centrer autour de 0 si les ξ_n sont définis sur un autre intervalle. Notons que si les ξ_n suivent une règle déterministe du type $\xi_{n+1} = f(\xi_n)$, le système est purement déterministe: $(x_{n+1}, \xi_{n+1}) = (F(x_n, \xi_n, n), f(\xi_n))$.

Nous allons comparer d'une nouvelle façon les effets des perturbations déterministes avec ceux des perturbations stochastiques pour mieux discerner le rôle joué par l'origine de la perturbation. Dans des travaux précédents [4, 5] l'effet d'une perturbation, comme le bruit gaussien blanc, a été comparé avec celui d'une perturbation chaotique provenant de l'application logistique. Dans ce travail, nous allons sélectionner les perturbations déterministes et stochastiques à comparer de façon qu'ils aient des propriétés statistiques similaires. La comparaison s'effectue en étudiant la courbe de la SNR en fonction de l'intensité de la perturbation D . Cette intensité vient définie de la même façon qu'avec le bruit blanc, $D = 2\sigma^2$, où σ est la déviation standard de la perturbation.

3 Les perturbations utilisées

Dans cette section nous allons préciser les perturbations utilisées pour notre analyse. Les perturbations aléatoires sont caractérisées par leur densité de probabilité. A leur tour les propriétés statistiques plus basiques des perturbations chaotiques sont données par leur mesure invariante. Le critère sera donc de comparer des perturbations chaotiques dont la densité de la mesure soit similaire à la densité de probabilité de son associé stochastique.

Une première perturbation chaotique que l'on peut utiliser est du chaos provenant de la perturbation dérivée de l'application tente $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ([6]), qui s'exprime de la façon suivante:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 2(1-x), & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

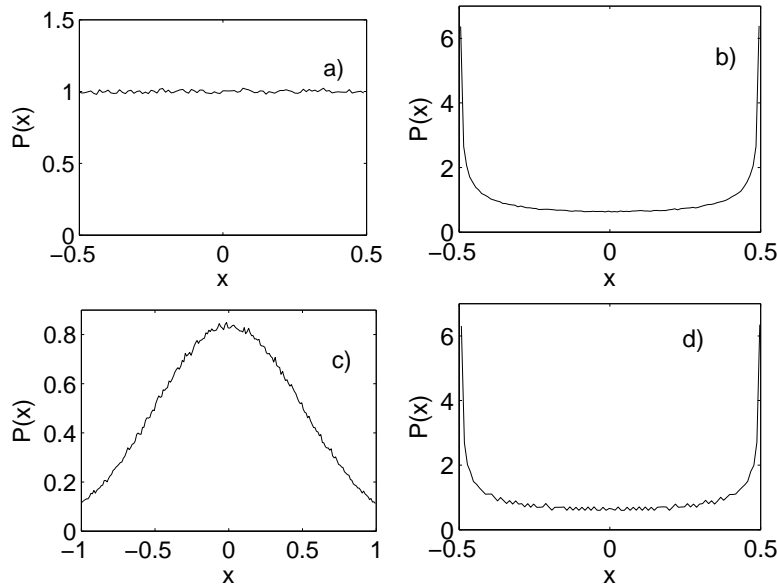


FIG. 1 – Distribution de probabilité pour quelques perturbations parmi celles considérées: densité de la mesure de la perturbation dérivée de l'application tente (a), distribution de probabilité du bruit logistique blanc, équivalente à la densité de mesure de l'application logistique (b), distribution de probabilité de la perturbation gaussienne déterministe, suivant une loi de type gaussienne (c), distribution de probabilité de la perturbation vibrationnelle (d)

Statistiquement elle est décrite par la densité de la mesure invariante, qui est constante sur l'intervalle $[0,1]$ comme on peut l'observer sur la figure 1 (a). Il semble ainsi plus naturel de la comparer avec une perturbation aléatoire similaire, comme le bruit blanc uniforme.

Une autre façon d'obtenir facilement une perturbation chaotique consiste à itérer l'application logistique $G : [0,1] \rightarrow [0,1]$ qui vient donnée par l'expression $x_{n+1} = G(x_n) = 4x_n(1 - x_n)$. Il serait intéressant de générer une perturbation aléatoire dont la densité de probabilité soit identique à sa densité de mesure pour comparer les effets des deux perturbations. Pour ce faire, l'équivalence topologique parmi l'application logistique $G(x)$ et l'application tente $T(x)$ peut être mise à profit: les trajectoires de l'application logistiques correspondent bijectivement à celles de l'application tente via le mappage $C(x) = (1 - \cos(\pi x))/2$ ([6]). Donc, si on dispose d'un nombre suffisamment grand de trajectoires de l'application tente passant avec une probabilité uniforme par l'intervalle $[0,1]$, ceux-ci peuvent être associés aux trajectoires de l'application logistique qui couvrent donc l'intervalle $[0,1]$ avec la distribution de cette application. Alors, si l'on a une suite de points aléatoires $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ avec une distribution de probabilité uniforme, la suite $\{X_i = C(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ sera aléatoire et aura une densité de probabilité égale à la densité de mesure de l'application logistique. Cette propriété est illustrée sur la figure 1(b). On a donc une perturbation chaotique et une perturbation aléatoire qui l'imitent, on appellera celle-ci du bruit logistique.

Étant donné que les perturbations aléatoires les plus habituelles auxquelles les systèmes dynamiques sont soumis sont modélisés par du bruit blanc gaussien, il faudrait chercher son associé déterministe. Avec deux suites de nombres aléatoires $\{\xi_1^i\}_{i=1}^{\infty}$ et $\{\xi_2^i\}_{i=1}^{\infty}$ générés suivant une distribution uniformément aléatoire dans l'intervalle $[0,1]$ nous pouvons obtenir

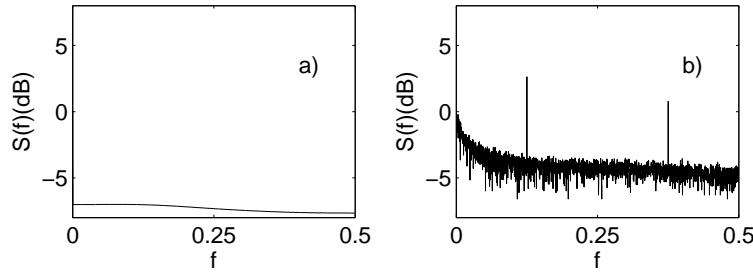


FIG. 2 – Spectre des suites x_n . (a) $\xi = 0$ (b) $\xi \leq 0.001$. Les pics aux multiples impaires de f_0 sont typiques des systèmes bistables.

des nombres η_n suivant une distribution gaussienne via la transformation de Box-Muller: $\eta_n = \sigma \sqrt{-2 \log \xi_1^n} \cos(2\pi \xi_2^n)$ ([7]). Il est donc facile de voir que si les nombres ξ_1^n et ξ_2^n proviennent des itérations de l'application tente $\xi_j^{n+1} = T(\xi_j^n)$, $j = 1, 2$, la quantité η_n suivra aussi une distribution statistique du même type que le bruit blanc gaussien, comme on peut l'observer sur la figure 1 (c).

Insistons sur le fait que les propriétés statistiques des perturbations ne sont pas décrites complètement par ses distributions de probabilité dans les cas aléatoires ni par ses densités de mesure dans les cas déterministes chaotiques. En fait, les autocorrélations peuvent avoir un effet très important sur la dynamique générale. Par exemple, même si les perturbations sont symétriques (c'est à dire, si la probabilité d'avoir une perturbation ξ est égale à celle d'avoir une perturbation $-\xi$) la densité de probabilité $P(x)$ pour une trajectoire de passer par $[x, x + dx]$ peut en revanche être asymétrique. Ces considérations seront détaillées dans une future publication [7], il faut retenir simplement l'idée que la condition d'avoir des distributions de probabilité égales est assez "faible".

Finalement, nous remarquerons que l'intensité du bruit doit être bornée afin d'empêcher que le système dynamique diverge. On peut montrer que pour notre système il existe une valeur de ξ critique (ξ_c) pour laquelle la suite des x_n diverge. Dans le cas des perturbations dérivée de l'application tente, aléatoire uniforme et logistique, il est simple d'empêcher la divergence car elles peuvent être convenablement rééchellonnées pour donner des valeurs parmi $[-\xi_{max}, \xi_{max}]$ avec $0 < \xi_{max} < \xi_c$. Dans ce cas, la déviation standard σ (et donc l'intensité de la perturbation) peut être calculée analytiquement en fonction de ξ_{max} grâce à la simplicité de leurs distributions probabilistes. Avec les perturbations gaussiennes il faut être attentif et les majorer à la valeur ξ_c .

Dans ce travail nous allons aussi utiliser des perturbations vibrationnelles afin d'observer la Résonance Vibrationnelle (qui a été observée pour des systèmes bistables comme celui déjà présenté). Les perturbations vibrationnelles sont de la forme $\xi_n = A \sin(2\pi \Omega n)$ où $\Omega \gg f_0$, et la distribution statistique de ses valeurs est montrée dans la figure 1 (d).

4 Analyse des résonances induites

Après avoir décrit les types de perturbations employées, il faut maintenant analyser les effets qu'elles provoquent sur notre système dynamique. Comme le mentionne l'introduction, les perturbations ξ provoquent des sauts entre les deux attracteurs de notre système dynamique. Quand ces sauts ne sont pas possibles, le spectre d'une trajectoire x_n est du même type que celui que l'on peut observer dans la figure 2 (a) (assez similaire à

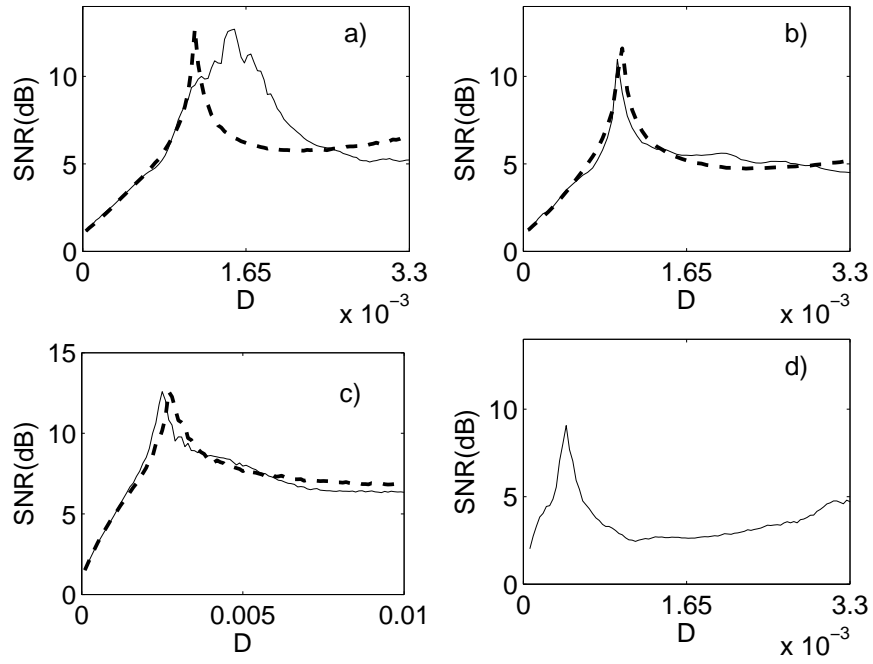


FIG. 3 – SNR pour les différentes perturbations. (a) Chaos du type application tente (-) et nombres aléatoires uniformément distribués dans l'intervalle $[0,1]$ (- -); (b) Chaos logistique (-) et "bruit logistique" (- -). (c) "Perturbation déterministe gaussienne" (-) et bruit blanc gaussien (- -)

celui d'un bruit). Par contre, quand la perturbation est suffisamment forte pour induire des sauts, un pic assez bien défini apparaît à la fréquence f_0 , comme on peut le voir dans la figure 2 (b). S'il y a une valeur de l'intensité du bruit pour laquelle le rapport entre la puissance du pic et le fond de bruit (SNR) est maximale, on est alors en présence d'une résonance.

La SNR a été calculée à partir d'une moyenne de suites $\{x_n\}_{n=1}^N$ du système pour les différents types de perturbations ξ_n . Les résultats sont montrés à la figure 3. La première remarque à faire est que toutes les perturbations induisent un comportement résonant du même type, il y a toujours un maximum assez défini pour une certaine valeur de l'intensité de la perturbation D . Ce résultat nous montre pour la première fois que dans un système chaotique comme celui décrit par l'équation 1, la résonance chaotique et la résonance vibrationnelle peuvent être observées.

Néanmoins, la figure 3 expose le résultat le plus important que l'on souhaite souligner. Pour les "perturbations logistiques" les maxima des courbes du cas déterministe et du cas stochastique sont très proches et ont presque la même hauteur. On peut dire la même chose du cas des perturbations gaussiennes, où les courbes présentent clairement un maximum pour une valeur très similaire à l'intensité de la perturbation D . Même dans le cas des perturbations tente et aléatoire uniforme on peut voir que pour des valeurs petits de l'intensité du bruit il y a une coïncidence assez nette. Une description détaillée de l'explication de ces phénomènes sera développée dans un futur article. Notons aussi que la perturbation du type vibrationnel donne un résultat assez similaire qualitativement à celui des perturbations précédentes.

5 Conclusions

Dans ce travail nous avons montré qu'un système dynamique assez simple présente un comportement du type résonant quand il est soumis à des perturbations du type stochastique, chaotique et vibrationnel. Nous avons aussi montré que dans certaines situations il est très difficile de distinguer parmi comportements du type SR dues à l'action du bruit de ceux qui sont dus à quelques perturbations déterministes, même si les signaux ont des similitudes assez superficielles.

C'est particulièrement intéressant car ceci peut s'appliquer aux systèmes réels où l'on considère que le bruit joue un rôle très important. Nos résultats montrent que une perturbation chaotique ou une perturbation si simple qu'une perturbation harmonique de haute fréquence pourrait jouer le même rôle.

Cela pourrait aussi impliquer qu'il y ait des contributions déterministes (faibles) considérées comme du bruit lorsque le modèle phénoménologique du système dynamique a été construit. La détermination de l'existence de ces contributions déterministes pourrait être utile si l'on veut contrôler le système dynamique pour en obtenir une certaine réponse.

Remerciements

Nous remercions le soutien financier du Ministère des Sciences et Technologie de l'Espagne, projet BFM2003-03081, et l'Universidad Rey Juan Carlos pour une Bourse de Thèse de doctorat du Programme de Recherche de l'Université.

Références

- [1] L. Gammaitoni, P. Hanggi, P. Jung, and F. Marchesoni. *Stochastic Resonance*, Rev. Mod. Phys. **70**, 223 (1998).
- [2] V. Anischenko, A. Neiman, and M. A. Safanova. *Stochastic Resonance in Chaotic Systems*, J. Stat. Phys, **70**, 183 (1993).
- [3] V. Anischenko, A. Neiman, M. A. Safanova, and L. Chua. *Stochastic Resonance in Chua's Circuit*, Int. J. Bifurcation and Chaos **2**, 397 (1992).
- [4] E. Ippen, J. Lindner and W. Ditton *Chaotic Resonance: A Simulation*, J. Stat. Phys,**70**, 437 (1993).
- [5] G. Ambika, N.V. Sujatha, and K. P. Harikrishnan *Stochastic resonance and chaotic resonance in bimodal maps: a case study*, Pramana (J. Phys.) **59**, 539 (2002).
- [6] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. Yorke, *Chaos, an introduction to dynamical systems*, Springer-Verlag (1996).
- [7] W. H. Press, S. A. Teulolsky, V. P. Vetterling and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press (1988).
- [8] S. Zambrano, J. M. Casado, and M.A.F Sanjuán. En préparation (2005).