

La entropía de Cuencas y la Propiedad de Wada en sistemas dinámicos

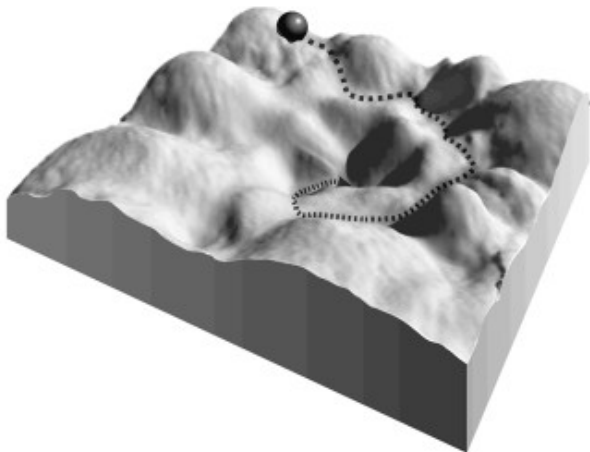
Alexandre Wagemakers

Grupo de dinámica no lineal, teoría del caos y sistemas complejos, URJC

December 12, 2019

Sistemas dinámicos:

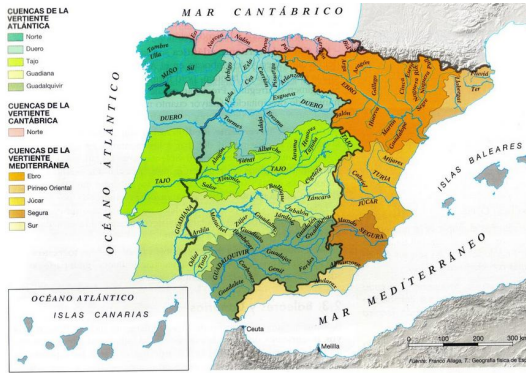
Dejamos evolucionar un sistema dinámico y va seguir una trayectoria, al final llegará a un estado estacionario. Hablamos de una evolución temporal determinista.



Analogía hidrográfica

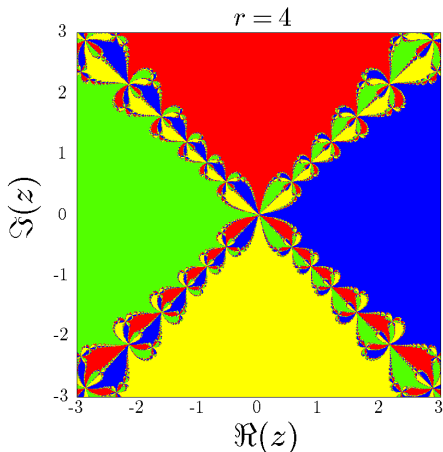
Cuenca hidrográfica:

Si una gota cae en una cuenca hidrográfica acabará en una masa de agua particular.



Cuenca de atracción:

Una cuenca es un conjunto de condiciones iniciales que terminan en una determinada región del espacio de las fases.



Cuenca de atracción y dinámica no lineal

Sistemas dinámicos lineales → Estructuras fractales →
Impredicibilidad en el comportamiento



Fronteras

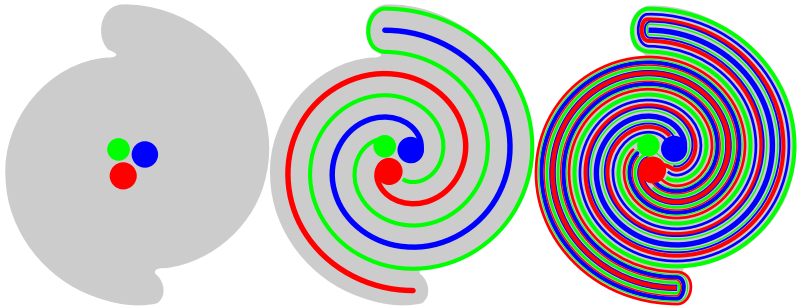
Un mapa plano:

¿Cuántos países puede separar una frontera?

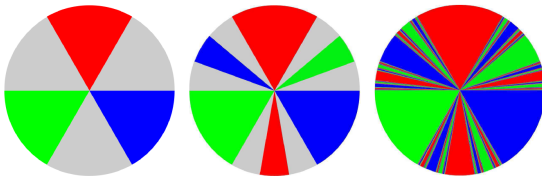


Cuencas de Wada

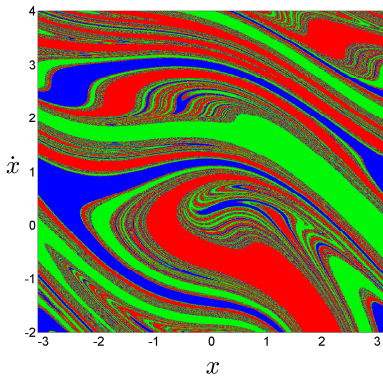
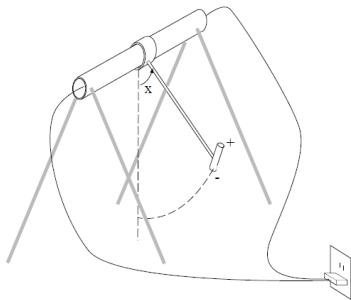
Cuenca conexa



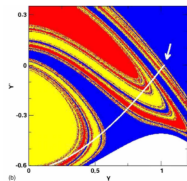
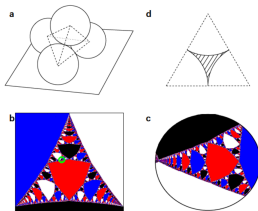
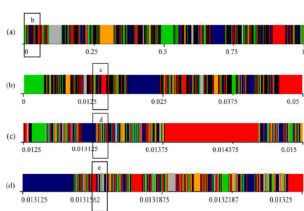
Cuenca disconexa



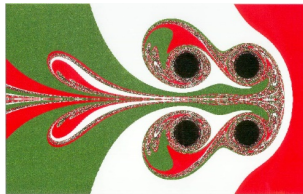
Propiedad de Wada en el péndulo magnético



Propiedad de Wada en la naturaleza



(c) Dispersión caótica en galaxias

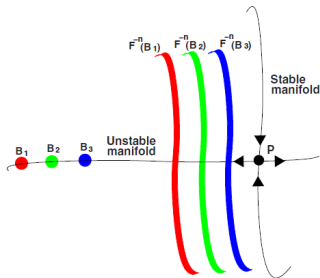


(d) Hidrodinámica

¿Cuándo una cuenca tiene la propiedad de Wada?

Métodos analítico de Nusse-Yorke:

Si la variedad inestable de un orbita periódica (inestable) pasa por todas la cuencas de atracción, tenemos la propiedad de Wada.

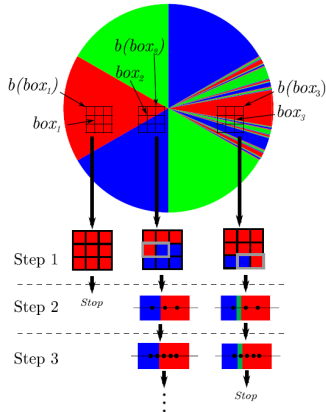


Nusse, H. E., and Yorke, J. A. Wada basin boundaries and basin cells. *Physica D*, 90, 242-261 (1996).

Grid Method

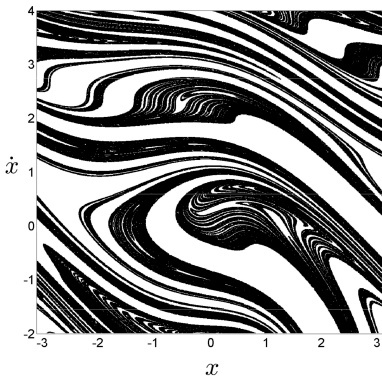
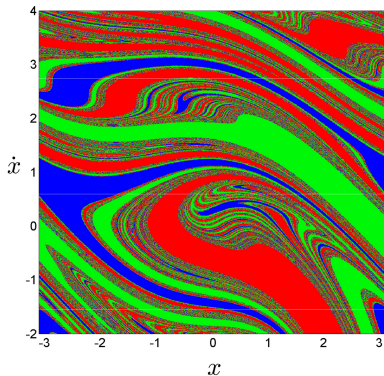
Métodos numérico, el enfoque de la rejilla:

Dado una frontera Wada con tres colores, siempre vamos a encontrar entre dos colores diferentes el tercer color.



Grid Method

Probamos encontrar siempre el tercer color refinando la rejilla hasta cierta escala

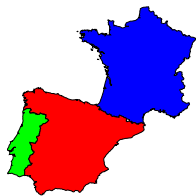


Daza, A., Wagemakers, A., Sanjuán, M. A. F., and Yorke, J. A. Testing for Basins of Wada. Scientific Reports, 5, 16579 (2015).

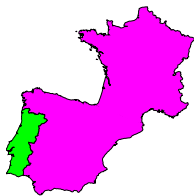
Merging Method

¿Que es lo que queda cuando mezclamos colores?

Nos centramos ahora sobre una propiedad invariante: Cuando fundimos dos cuencas juntas, una frontera con la propiedad de Wada no cambia.



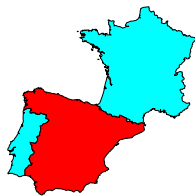
(e)



(f) Fraña



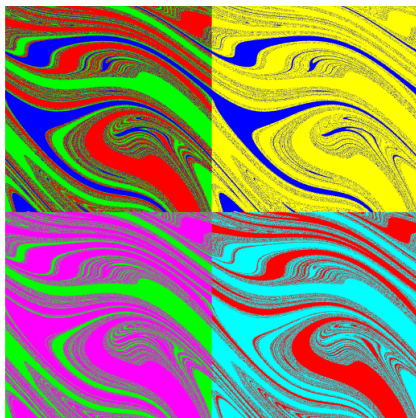
(g) Portuñal



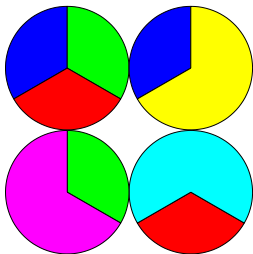
(h) Portucia

Merging Method

Ahora para una cuenca fractal con la propiedad de Wada:



(a)



(b)



(c)

Daza, A., Wagemakers, A., Sanjuán, M. A. F. Ascertaining when a basin is Wada: the merging method. *Sci. Rep.*, 8(1), 9954. (2018).

Straddle Method

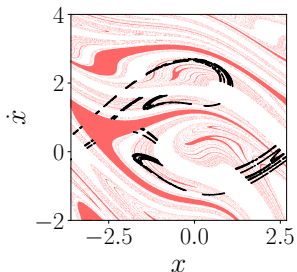
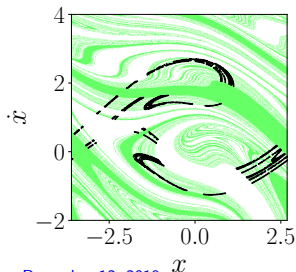
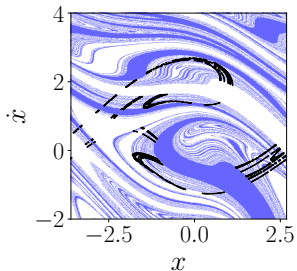
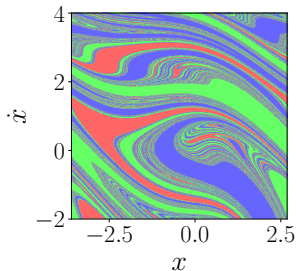
¿Que es fundamentalmente único en una frontera Wada?

- Existe un conjunto invariante no atractivo que reside en la frontera: **la silla caótica**.
- Aplicamos la idea de fundir cuencas anteriormente y buscamos la silla caótica para todas las combinaciones de cuencas.
- Si la silla es la misma para todas las combinaciones tenemos una frontera Wada.

A. Wagemakers, A. Daza, M. A.F. Sanjuán, The saddle-straddle method to test for Wada basins, arXiv:1901.10728 [nlin.CD].

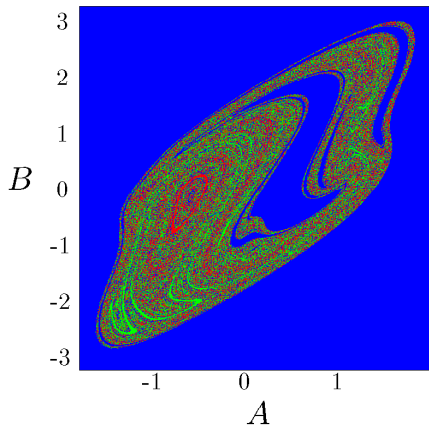
Straddle Method

Verificación para el péndulo caótico



¿Donde hemos encontrado cuencas de Wada?

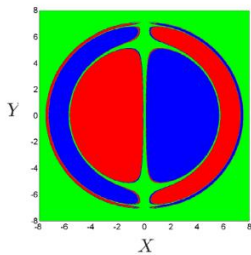
Sistemas dinámicos con retardo:



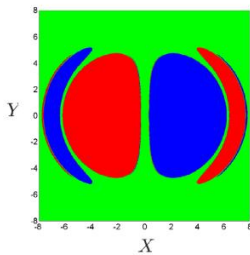
Daza, A., Wagemakers, A., and Sanjuán, M. A. F. Wada property in systems with delay. *CNSNS*, 43, 220-226 (2017).

¿Donde hemos encontrado cuencas de Wada?

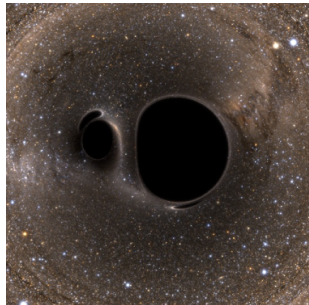
Agujeros negros binarios



(a) $d = 1$

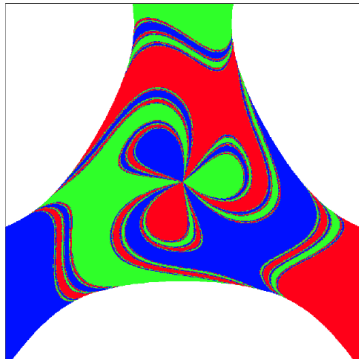
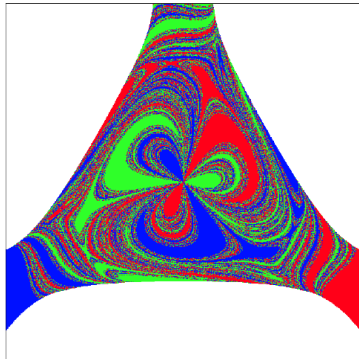


(b) $d = 2$



Alvar Daza, Jake O. Shipley, Sam R. Dolan, and Miguel A. F. Sanjuán, Wada structures in a binary black hole system. *Phys. Rev. D* 98, 084050 (2018)

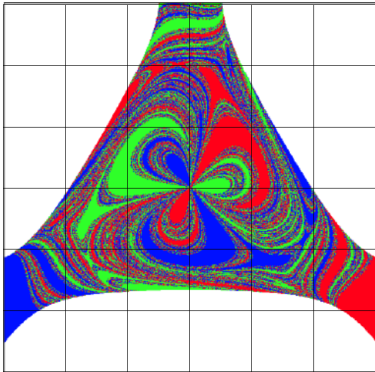
Una pregunta fundamental: ¿Quién es más impredecible?



Definición de la entropía de las cuencas:

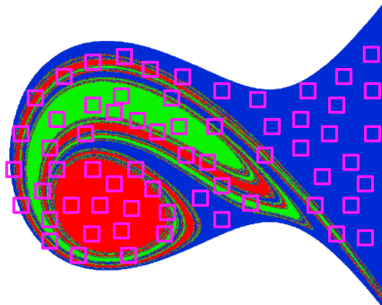
Información que podemos hallar en la cuenca:

- Medimos la impredecibilidad de una cuenca de atracción midiendo el desorden de pequeñas zonas con la entropía de Shannon.
- Hacemos un promedio del desorden de todas estas zonas



- Dividimos el espacio de las fases en cajas.
- Contamos la proporción de cada color en las cajas.
- Calculamos la entropía de Shannon para cada caja y promediamos.

Entropía de la cuencas en la frontera



- Nos quedamos únicamente con las cajas que están en la frontera.
- Calculamos la entropía de Shannon para cada caja y promediamos.
- Si el promedio es superior a $\log(2)$, la cuenca es Wada.

Daza, A., Wagemakers, A., Georgeot B., Guéry-Odelin D. and Sanjuán, M. A. F.. Basin entropy: a new tool to analyze uncertainty in dynamical systems. Scientific Reports 5, 16579, 2015.

Las matemáticas

$$U(x, y, z) = -U_1 \frac{w_{10}^2}{w_1^2(x)} e^{-2(y^2+z^2)/w_1^2(x)} - U_2 \frac{w_{20}^2}{w_2^2(x')} e^{-2(y'^2+z^2)/w_2^2(x')}$$

$$S = \sum_{i=1}^N S_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i} p_{i,j} \log \left(\frac{1}{p_{i,j}} \right). \quad (1)$$

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3. \quad (2)$$

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z^r - 1}{rz^r - 1}, \quad (3)$$

$$\log(S_b) = \alpha \log(\varepsilon) + \log \left(\log(N_A) \frac{n}{\bar{n}} \right). \quad (4)$$

$$\ddot{x} + d\dot{x} - x + x^3 = F \sin(\omega t). \quad (5)$$

$$\dot{x}_0 = \omega$$

$$\dot{x}_1 = x_1 + \alpha(x_N - x_N^3) + F \sin(x_0) \quad (6)$$

$$\dot{x}_i = \frac{N}{\tau}(x_{i-1} - x_i)$$

$$x(t) = \pm x_0 e^{(1+\alpha)(t+\tau)} \sqrt{\frac{1+\alpha}{1+\alpha - x_0^2(1 - e^{2(1+\alpha)(t+\tau)})}}. \quad (7)$$

$$S_{bb} = \frac{\sum_{i=1}^{N_b} S_i}{N_b}, \quad (8)$$

$$d_H(X, Y) = \max\left\{ \sup_{x \in X} d(x, Y); \sup_{y \in Y} d(y, X) \right\}. \quad (9)$$



Joyeux Anniversaire Miguel!